

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1914.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *La trinitrobenzina asimmetrica 1. 2. 4.* Nota del Socio G. KOERNER e del dott. A. CONTARDI.

I tentativi fatti da Paolo Hepp ⁽¹⁾, per preparare la trinitrobenzina 1. 2. 4 non condussero a un prodotto ben definito e puro, ma il lavoro dimostrò fuori di ogni dubbio che nella nitratura della paradinitrobenzina si formava anche questo trinitroderivato.

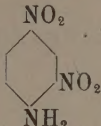
Nel 1890 il Lobry de Bruyn ⁽²⁾ riprese lo studio di questo trinitrobenzolo e modificò il processo di nitratura, sia rispetto ai rapporti tra la binitrobenzina e la miscela nitrante, sia nella composizione della miscela nitrante stessa, sia ancora nella durata della reazione, e mutò infine totalmente il sistema di separazione dei prodotti risultanti dalla reazione. Mentre, infatti, l'Hepp aveva sempre cercato di separare la miscela della trinitrobenzina asimmetrica dalla paradinitrobenzina basandosi sulla diversa solubilità delle due sostanze nei vari solventi, il Lobry de Bruyn impiegò come mezzo di separazione la diversa volatilità delle due sostanze stesse. E così egli separò dalla miscela per sublimazione quasi tutta la paradinitrobenzina inalterata, e purificò il residuo mediante trattamento con acido nitrico e successiva cristallizzazione dall'etere o dall'alcool metilico. Egli descrisse la trinitrobenzina dissimmetrica come una sostanza ben cristallizzata, di color giallo chiaro, fusibile a 57°,5. Però nelle determinazioni della solubilità della so-

⁽¹⁾ Ann. d. Chem., 215, pag. 361.

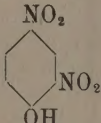
⁽²⁾ Recueil d. Trav., 9, pag. 186.

stanza stessa nei vari solventi si accorse che quantunque rispondesse assai bene ai dati analitici, pure essa doveva contenere almeno il quattro per cento di paradinitrobenzina, che non riuscì a separare.

Noi abbiamo ripreso lo studio di questo trinitroderivato cambiando totalmente e il materiale di partenza e il processo di preparazione.

Nella dinitroanilina ordinaria  fondente a 180° abbiamo sostituito il gruppo amidico con un gruppo nitrico passando attraverso al nitrato del diazocomposto e seguendo il processo da noi già in altra Nota descritto ⁽¹⁾.

Si trattarono gr. 54 di dinitroanilina ordinaria con lo stesso peso di acido nitrico della densità = 1,48; e a 0° la miscela venne fatta attraversare da una corrente di vapori nitrosi fino a completa saturazione, agitando continuamente la massa in modo che il nitrato del diazocomposto, che si andava formando, non dovesse agglomerarsi in un blocco compatto in modo da rendere difficile e pericoloso in seguito il maneggio della sostanza, data la sua grande potenza esplosiva. Scacciati con una corrente d'aria i vapori nitrosi in eccesso, diluito con pochissima acqua a 0° la miscela, raccolto il precipitato su rete di platino e aspirato, il nitrato del diazocomposto venne disciolto in mezzo litro d'acqua fredda, indi a 0° trattato con una soluzione formata da gr. 250 di solfato di rame cristallizzato, gr. 69 di nitrito sodico, disciolti in gr. 1500 di acqua. Lasciato a sè il tutto per qualche ora veniva in seguito riscaldato a b. m. Sul fondo del recipiente si raccoglie un olio bruno che per raffreddamento solidifica. Estratto questo con cloroformio e ripetutamente lavata la soluzione cloroformica con acqua, per evaporazione del solvente si ottennero gr. 45 di un olio bruno che dopo breve riposo si riprendeva in una massa cristallina. La purificazione venne in seguito eseguita riscaldando il prodotto per parecchie ore con acido nitrico della densità 1,4; evaporata la massima parte dell'acido, la sostanza risultante venne ripetutamente trattata a b. m. con acqua per togliere l'acido picrico formatosi per il precedente trattamento. Nella reazione di sostituzione del gruppo amidico con quello nitrico una parte piccola del diazocomposto dà luogo alla forma-

zione del dinitrofenolo  che viene trattenuto facilmente dalla trinitro-

benzina, ed in seguito per trattamento con l'acido nitrico si trasforma in acido picrico. La trinitrobenzina, così purificata, veniva nuovamente cristallizzata dall'acido nitrico diluito, indi lavate ed essiccate le laminette lucenti

(¹) Rendiconti, R. Acc. Lincei vol. XIII, Serie 5^a, 1° sem., pag. 281.

e incolore ottenute dall'acido nitrico, venivano nuovamente cristallizzate da etere. La parte ancor bruna rimasta indisciolta nell'acido nitrico diluito che non si poteva imbiancare per un nuovo trattamento con acido nitrico $d = 1,4$, venne estratta con cloroformio, filtrata dalla resina rimasta insolubile e decorata con nero animale.

Per lenta evaporazione dell'etere la trinitro-benzina 1, 2, 4 si ottiene cristallizzata in sottili lamine quasi incolore, molto solubili nell'etere, fondenti a 61° (termometro n. 21 474 normale).

La determinazione d'azoto ha dato:

Sostanza impiegata gr. 0,2112.

Azoto cc. 36,2 a $t = 24^{\circ}$ $H = 758$.

Azoto trovato % 19,69.

Azoto calcolato per $C_6H_3(NO_2)_3$ % 19,7.

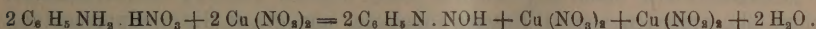
La trinitrobenzina riscaldata in tubo chiuso a 140° con ammoniacca alcoolica si trasforma quantitativamente nella dinitroanilina dalla quale si era partiti.

Sono in corso esperienze per ottenere la trinitrobenzina 1, 2, 3 sinora sconosciuta, e speriamo di poter presto riferire in proposito.

Correzione alla Nota: *Benzine nitro-sostituite ottenute dai corrispondenti amino-derivati*.

(Rendiconti, vol. XXIII, serie 5^a, fasc. 5^o).

La prima equazione a pag. 283, riga 7, è stampata in modo incompleto e va corretta in:



Geologia. — *Su una Nota di Steinmann intorno alle rocce di Prato in Toscana.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

Lo Steinmann ha recentemente pubblicato una breve Nota sopra i calcari e i Diaspri o Radiolariti concomitanti delle rocce serpentinosi dei dintorni di Prato in Toscana, e precisamente di Figline in Val di Ripa ⁽¹⁾, e dà pure uno spaccato geologico della regione. Egli deduce che i Diaspri, insieme con le Serpentine formanti una zona periferica, esterna, alla collina, appartengono al Malm medio; i calcari ed i galestri più interni e concordanti con le rocce precedenti, appartengono al Titonico, cioè al Giura più alto, ovvero al Neocomiano, fondato sur una foraminifera, la *Calpionella alpina* Lorenz, che egli vi ha ritrovato, la pietra forte al Cenomaniano; il macigno al Turoniano, Senoniano e incertamente al Terziario inferiore.

(1) G. Steinmann, *Ueber Tiefenabsätze des Oberjura im Apennin*. (Geologische Rundschau, Bd. IV, Heft 7; 13 novembre 1913).

Questa regione fu già oggetto di studio, specialmente per la litologia, — oltre che da Bonney (1879) che riteneva diaspri e fitaniti concotte dal fuoco, e da Sterry Hunt (1883) che riteneva paleozoica la formazione, — da parte del Cossa, di Celso Capacci ⁽¹⁾, del Lotti ⁽²⁾ e del Panichi ⁽³⁾, i quali pure accompagnarono le loro Note con alcuni spaccati geologici.

Se si dovesse correr dietro a tutte le discrepanze d'opinione che si manifestano in un argomento così personale e subiettivo come è quello della geologia topografica locale, si farebbe opera il più delle volte vana e si perderebbe il tempo a scapito delle ricerche e degli studi nuovi che ognuno deve sopra tutto curare: ma quando si tratta del parere di uno scienziato della riputazione dello Steinmann, vale la pena d'intrattenervisi. Il nostro A. si fonda sull'alberese a *Calpionella*, e sui Diaspri, anche sulla posizione stratigrafica di essi, come dicevo, esterni al colle e periferici alla pianura, poichè pendono contro questa, cioè verso l'interno del monte. Si tratta di uno di quei rovesciamenti periferici così frequenti all'esterno di un sistema montuoso, che si manifestano specialmente quando sieno a contatto rocce di plasticità così grandemente diversa, come sono appunto quelle della regione di Prato. Il compianto Giordano, per stabilire se vi fosse rovesciamento o no e per determinare la posizione stratigrafica di quelle rocce esterne, aveva fatto la proposta, a vero dire più da ingegnere che da geologo, di aprire un foro per vedere che cosa si trovasse sotto. Ma quelle rocce sono identiche a quei diaspri, calcari, galestri, gabbri, diabasi e serpentine che appaiono poco lontane, in regolare posizione, all'Impruneta presso Firenze ⁽⁴⁾, come pure, regolarmente, nell'Appennino a tutte le parti dell'orizzonte, e fra noi non vi è contestazione che appartengano all'Eocene superiore, non già al Giura rappresentato da ben altre rocce (il Titonico ed il Lias, anche da diaspri), e separato da alta serie di terreni terziari anche fossiliferi.

I calcari e le argille adiacenti partecipano anch'essi in parte al rovesciamento; perciò lo Steinmann li ritiene sovrastanti ai diaspri, e li attribuisce al Neocomiano: ma in realtà sono sottostanti e relativamente più antichi. Per poco che l'A. avesse seguitato verso N-E, avrebbe veduto la serie regolarmente invertirsi, diventare ampiamente regolare e formare un ampio e regolare anticlinale; ciò vedesi in parte anche negli spaccati, sebbene limitati e locali, del Capacci, del Lotti, del Panichi, i quali tutti ammisero l'esistenza d'inversioni, senza darne completamente ragione, per non avere seguito tutta la serie più a settentrione. La serie degli strati in quell'anti-

(1) C. Capacci, *La formazione ofiolitica del Monte Ferrato* (Boll. Comm. geol. 1881).

(2) B. Lotti, *Rilevamento geologico eseguito in Toscana* (Boll. Comm. geol. 1894).

(3) U. Panichi, *Ricerche petrografiche, chimiche e geologiche sul Monte Ferrato* (Atti Soc. tosc. di sc. nat., Pisa, 1909).

(4) C. De Stefani, *Carta geologica dei dintorni di Firenze, Osservazioni geologiche sul terremoto di Firenze del 18 maggio 1895*, Roma 1897.

clinale accompagnato da lievi pieghe laterali, è la seguente, cominciando dal basso:

1. Arenaria macigno di Val di Bisenzio. In valle del Mugnone contiene *Nummulites lenticularis* Désm., *N. venosa* Ficht et Moll, *N. sub Beaumonti* De la H., *N. Tchihatcheffi* D'Arch., ed appartiene all'Eocene medio, al Luteziano Superiore. In qualche luogo, p. e. alla Golfolina, si trovano, al di sotto, strati litologicamente simili ai seguenti.

2. Strati, nella regione Pratese non molto alti, in prossimità dell'arenaria, mentre assai più lo sono nell'adiacente Val di Sieve, o verso Firenze, di calcari da cemento, galestri scuri, pietra forte con *Inocerami* indubbiamente eocenici, *Ostrea Cocchii* De St., *Pennatulites*, *Nummulites subitalica* Tellini, *N. italica* Tell, *N. Guettardi* D'Arch., *N. venosa* Ficht. et Moll., *N. variolaria* Sow., *N. subirregularis* De la H., *N. sub Beaumonti* De la H., etc. etc. Appartengono alla più alta parte dell'Eocene medio, al Bartoniano. Le *Nummuliti* vi sono abbondantissime in lenti speciali. Il calcare è formato da *Globigerinidae* abissali.

3. Calcarei marnosi assai alti, specialmente ad Oriente, pure a *Globigerinidae* con *Helminthoidea labyrinthica* H., e nei dintorni di Firenze con *Nummulites Boncheri* De la H., *N. laxispira* De la H., *N. Tournoueri* De la H., *N. bericensis* De la H., *N. budensis* Hant, *N. curvispira* Mgh., *N. subirregularis* De la H., cec. (¹). Rappresentano in Toscana la parte inferiore dell'Eocene superiore, il Priaboniano. In Liguria gl'*Inoceramus* arrivano fino a questo piano entro i calcari di mare profondo.

4. Alberesi, galestri, diaspri, rocce e'uttive già detti. Nel Fiorentino, fuori delle alghe e delle solite impronte problematiche, non si trovarono che radiolarie nei diaspri, foraminifere (*Globigerinidae*, ed ora, secondo lo Steinmann, *Calpionella alpina*), nei calcari, tronchi silicizzati di *Alnus* Sp. e di *Cupressoxylois peucezinum* Goepp. (²) all'Impruneta, e i denti di *Ptychodus latissimus* Ag. al Poggio al Pino (³): ma fuori vi si trovarono pure delle nummuliti, e spicule di spugna e radiolarie trasformate spesso in calcite. La posizione stratigrafica sopra tutta la serie, al sommo dell'Eocene superiore, è, per quasi tutti i geologi italiani, omai sicura.

Non vi ha traccia, in quei luoghi, di Giura nè di Creta; le rocce di tali età sono nell'Appennino assai diverse, e ben differente è l'unico lembo più vicino di Creta superiore a Monteripaldi presso Firenze.

(¹) M. Rivagli, *Nummuliti e orbitoidi eoceniche dei dintorni di Firenze* (Palaeontographia italica, vol. XVI, 1910).

(²) L. Pampaloni, *Sopra alcuni tronchi silicizzati dell'Eocene superiore dell'Impruneta* (Boll. della Soc. geol. it., vol., XXI, 1902, p. 25).

(³) G. Canestrelli, *Denti di Ptychodus Agass. nel terziario dell'Appennino toscano-emiliano* (Atti Soc. tosc. di sc. nat., vol. XXVI, Pisa 1910, p. 102).

Se non che lo Steinmann, oltre che sull'esame stratigrafico e litologico imperfetto di breve spazio, si fonda principalmente sopra un indizio paleontologico dato, secondo lui, dalla *Calpionella alpina* Lorenz, e dai diaspri. Già da molti anni il Pantanelli, troppo presto rapitoci (e fu il primo a vedere le radiolarie nei diaspri), aveva descritto radiolarie dell'Eocene superiore ⁽¹⁾. Parmi che, dopo di lui, niun altro ne descrivesse in Italia, attribuendole a quella età. Il Rüst, venuto 5 anni dopo di lui e descrivendo radiolarie giuresi di Germania, si mostrò sorpreso delle determinazioni del suo predecessore; e non prestando fede all'età eocenica, che pure era esattamente determinata, ritenne giuresi anche quelle radiolarie italiane. Da allora in poi, quando si ritrova un diaspro, che non sia di età più antica determinata, pel solo fatto di esser diaspro, si attribuisce al Giura. In realtà, trattandosi di organismi così semplici e microscopici, non si riesce a trovare gran differenze fra radiolarie dei diaspri giuresi, cretacei ed eocenici, ed una cagione dell'incredulità straniera è pur questa: che formazioni eoceniche a diaspri, cioè di mare assai profondo, non rispondenti ai tipi classici dell'Eocene, fuori dell'Italia e della Balcania non se ne conoscono, e queste perciò non rispondono ai tipi dell'Eocene conosciuto nei manuali, anche in quelli dello Steinmann. Non deve perciò sorprendere se il paleontologo Steinmann, trovando dei diaspri in Italia, propendeva a ritenervi giuresi; nè deve sorprendere che nei calcari, da noi ritenuti eocenici, trovi la *Calpionella* indicata altrove nel Giura superiore e nella Creta inferiore; nè che egli si sia contentato di fare troppo breve osservazione stratigrafica; nè che, secondo un costume, per verità troppo poco scientifico, d'oltr'alpe, abbia mancato di meglio informarsi dei lavori nostri.

Tanto meno dovrei sorprendermi delle imperfette osservazioni dell'illustre collega germanico; perchè i nostri colleghi italiani fanno per lo meno altrettanto.

Due valentuomini come Vinassa e Neviani hanno descritto da molto tempo come Titoniani, cioè giuresi, diaspri di Grizzana e Lagàro e di altri luoghi nel Bolognese ⁽²⁾, raccolti da altri ed attribuiti al Titonico solo perchè diaspri, e perchè creduti erratici nelle argille scagliose, senza curarsi di studiarne e determinarne bene la stratigrafia e l'età sul posto. Ma quelli sono puramente e semplicemente appartenenti all'Eocene superiore insieme con le argille galestrine, coi calcari, con le rocce eruttive che li avvicinano e li circondano. E poichè un errore, come le ciliege, tira l'altro, lo Squinabol

⁽¹⁾ D. Pantanelli, *I diaspri della Toscana e i loro fossili* (Mem. Acc. Lincei, vol. VIII, 1879-80).

⁽²⁾ P. Vinassa De Regny, *Rocce e fossili di Grizzana e di Lagàro nel Bolognese* (Bell. Soc. geol. it., vol. XIX; 1900); A. Neviani, *Supplemento alla fauna a radiolari delle rocce mesozoiche nel Bolognese* (Boll. Soc. geol. it., vol. XIX, 1900).

recentemente, esaminando diaspri del Monginevro nelle Alpi Occidentali ⁽¹⁾, li attribuiva al Titonico per identità di due specie con altre di Cittiglio e con altre due del Bolognese ritenute pure giuresi. Bensì, se egli dà valore a quel paragone paleontologico, può attribuire anche i diaspri del Monginevro all'Eocene superiore. Che tali sieno in realtà, ne sono persuaso, perchè, nell'ultima Nota che ebbi l'onore di presentare ai Lincei ⁽²⁾, ho attribuito precisamente all'Eocene superiore le rocce verdi che accompagnano quei diaspri ⁽³⁾.

Lo Steinmann trova la *Calpionella* anche nell'alberese concomitante la formazione serpentinoso al M. Maggiore nei Colli Livornesi, ad occidente di Portoferraio e a Casa Bartoli all'Elba, sempre nella stessa formazione delle rocce verdi; e quegli alberesi pure attribuisce al giura superiore od alla creta inferiore. In questi luoghi, specialmente nei monti Livornesi, si ripete la medesima stratigrafia dei monti di Prato. Presso Montenero e alla Poggia, negli alberesi, nella più alta parte della formazione serpentinoso stanno lenti di calcare nummulitico trovate dal Salle.

Nell'isola d'Elba, oltre il Nummulitico dell'isoletta dei Topi da me trovato, il Lotti lo indica verso l'Acona sopra il calcare ad *Helminthoidea* e sotto calcari rosati e diabasi.

Quanto alla pietraforte cenomaniana, anzi, della creta superiore, essa si trova all'infuori del *Macigno*. Sopra il *Macigno* si trovano bensì, sovente *Iuoceramus* in posto: e se ciò non combina coi trattati di paleontologia, e nemmeno con quelli dello Steinmann, combina però con la realtà, sempre per la solita ragione che le faune eoceniche abissali dell'Appennino non sono prese in considerazione. Il *Macigno*, a sua volta, non contiene mai fossili più antichi dell'Eocene medio. Gli *alberesi*, ed in generale i calcari dell'Eocene appenninico, sono costituiti da foraminifere abissali, per lo più *Globigerinidae*, le quali non sono mai isolate; si comprende che i paleontologi abbiano preferito studiare le *Nummulitidi* ben conservate che talora racchiudono in lenti, piuttosto che le altre foraminifere le quali, in sezioni, sarebbero di incompleta determinazione specifica e di assai dubbia utilità. Non metto in dubbio che vi si trovi una foraminifera, la *Calpionella*, comune altrove nel Giura superiore e nella Creta inferiore: terrà compagnia alle radiolarie che altri attribuisce sempre al Giura ma che si trovano bene e meglio nell'Eocene superiore; e terrà compagnia a qualche altra specie abissale attribuita a terreni alquanto più antichi perchè

(1) S. Squinabol, *Radiolari della strada nazionale al Monginevro* Boll. R. Comm. geol., vol. XLIII, 1913, p. 282).

(2) C. De Stefani, *La zona serpentina della Liguria occidentale* (Rend. Acc. Lincei, 18 maggio 1913).

(3) Debbo soggiungere che alcuni dei calcari creduti triassici in Val di Bormida facenti parte della zona delle rocce verdi credute permiane sono invece calcari nummulitici eocenici.

manca nell'Eocene litorale finora conosciuto. A tali specie *relitti* non si può dare la prevalenza sulle numerose specie eoceniche e specialmente sulle *Nummulitidi* che si trovano dappertutto a tutti i livelli dell'Eocene e non soltanto sotto il *Macigno* o sopra le serpentine, e che sono state ormai discretamente studiate e determinate da noi. Quanto al carreggiamento della zona serpentinoso sulla quale lo Steinmann insiste, io non mi diffonderò: non uno dei geologi italiani o stranieri che abbia studiato la zona sui posti e non sulle carte stampate, può ritenerla ammissibile: il vedere che altri la suppone *carreggiata*, farebbe venire il dubbio sull'esistenza di *carreggiamenti* anche nei luoghi dove veramente esistono.

Terminerò, volgendo in italiano, con lo stesso epifonema diretto a noi dallo Steinmann. Egli desidera da noi schiarimenti sulle « numerose contraddizioni » nelle quali, dice egli, siamo caduti, « se noi non vogliamo rinunciare a fondare le nostre conclusioni coi metodi che si debbono usare nella geologia ». Ma la geologia si fonda sulla conoscenza della stratigrafia, ben inteso studiata sul posto e non sulle carte o soltanto sugli scritti dell'uno piuttosto che dell'altro; e della paleontologia, ben inteso non solo di quella talora schematica di uno o di altro trattato, non di una sola foraminifera o di una radiolaria, ma di tutti i fossili raccolti noti e studiati. Ora se l'illustre collega Steinmann avesse preso a fondamento l'una e l'altra, sarebbe arrivato a conclusioni più semplici e più naturali ⁽¹⁾.

(1) Forse lo Steinmann fu alquanto disorientato dalla *Carta geologica d'Italia*, foglio 106 Firenze, pubblicata dall'Ufficio geologico. Prescindendo dalla parte strettamente litologica, nella distribuzione e nella serie dei terreni terziari si potrebbero rilevare molte imperfezioni. Cominciando dal terreno più antico, l'*Arenaria Macigno* (*e'a*), non debbesi confondere con questa il calcare marnoso sulle destra della Sieve, nè l'*arenaria* di M. Ripaldi. Quest'ultima contiene cefalopodi, non nummuliti, ed appartiene alla Creta superiore. Il calcare marnoso di val di Sieve non è un'*arenaria*, e contiene nummuliti in quantità, non che strati arenacei con *Inoceramus*. Perciò la spiegazione della *Carta geologica* doveva dire semplicemente « *arenaria* (*macigno*) con nummuliti », e fermarsi qui: lasciando fuori il sèguito « *arenaria* calcarifera (*pietraforte*) con ammoniti, inocerami ed altri fossili probabilmente di trasporto ». Avvertasi pure che il trasporto di questi fossili è supposto nella dicitura, ma non esiste in realtà, ed in ciò sono in parte d'accordo col Lotti che rilevò quei terreni. A questa *Arenaria Macigno* (*e'a*) attribuiscesi invece la così detta « *Arenaria superiore* » (*e^s*) che forma qualche lembo a destra della Sieve, senza aggiungere « con strati calcarei e letti marnosi intercalati ». L'« *Arenaria superiore* » (*e^s*) del versante Fiorentino, nella quale piuttosto prevalgono gli « strati calcarei e letti marnosi intercalati » (*e^s*), che contiene Inocerami e Nummuliti, invece di essere la roccia Eocenica superiore a tutte, e tolta qualche parte che equivale all'*Arenaria Macigno* (*e'a*), succede alla detta *Arenaria Macigno* e andrebbe messa con gli « scisti arenacei ed argillosi rossi e grigi » (*e¹*). Nella spiegazione della carta succedono diaspri e ftaniti a radiolarie che accompagnano le masse ofiolitiche » (*e^a*): e sono i diaspri di Prato; ma questa roccia è la più alta di tutte, e andrebbe messa con parte dell'*e^s*, cioè coi « calcari (alberesi), scisti argillosi » che formano la più alta serie dell'Eocene intorno a Prato ed all'Impruneta. Invece l'altra parte dell'*e^s* a nord e a sud-ovest di Firenze, cioè « cal-

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili*. Nota II del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

4. DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA GENERALE. — Le condizioni più generali sotto cui una varietà algebrica può possedere un'infinità (discontinua) di sistemi regolari d'integrali riducibili, sono espresse dal seguente teorema:

I. Quando sopra una varietà (o curva) algebrica possedente p integrali semplici di 1^a specie, esistono $\mu (\geq 2)$ sistemi regolari indipendenti di q_1, q_2, \dots, q_μ integrali riducibili (ove $q_1 + \dots + q_\mu \leq p$), ed un altro sistema regolare ∞^{q-1} , indipendente da ciascuno di essi, ma contenuto nel loro sistema congiungente, la varietà possiede un'infinità discontinua di sistemi regolari di q integrali riducibili.

Dicendo che i μ sistemi dati, A_1, A_2, \dots, A_μ , sono indipendenti, intendiamo che non esista alcun legame lineare (a coefficienti non tutti nulli) fra i loro integrali, cioè che il loro sistema congiungente (regolare) K , abbia la dimensione $\sum_{i=1}^{\mu} q_i - 1$. L'ulteriore sistema regolare ∞^{q-1} , che si suppone contenuto in K , verrà indicato con A .

Ricorrendo, al solito, alla rappresentazione degli integrali della data varietà, coi punti dello spazio S , a $p - 1$ dimensioni, avremo ivi gli spazi A, A_1, \dots, A_μ, K immagini dei sistemi omonimi. Nelle ipotesi poste, gli spazi A_1, A_2, \dots, A_μ sono tra loro indipendenti, ed A è indipendente da ciascuno di essi.

Indicato con Σ_h lo spazio, a $\Sigma q_i - q_h - 1$ dimensioni, congiungente i $\mu - 1$ sistemi $A_1, \dots, A_{h-1}, A_{h+1}, \dots, A_\mu$, si prova facilmente, con elemen-

cari non alberesi, scisti argillosi e pietra forte in strati alternanti con nummuliti ed inocerami, probabilmente (anzi certamente non) di trasporto », forma una zona immediatamente sovrastante a quella dell'*Arenaria Macigno* insieme con l' e^1_2 , ed a questa zona, non a quella e^2_0 , dovevasi aggiungere « pietra da calce idraulica e da cementi ». A questa zona rispondono alcuni degli strati più a monte nei dintorni di Prato, confusi con la zona e^2 . Finalmente la zona e^2_0 è definita come « calcari » (non) « alberesi, con *Helminthoidea labyrinthica* e straterelli di arenaria interposti ». Ma non è la più alta dell'Eocene; tali sono invece le zone e^2_d ed in parte la e^2 .

Lo Steinmann, forse, in questo ordinamento non si è bene raccapezzato e non ha conosciuto i lavori di quelli che hanno compreso in modo differente la serie geologica dei dintorni di Firenze e dell'Appennino.

tari considerazioni iperspaziali ⁽¹⁾, che gli spazi $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\mu$ non hanno punti comuni. È questa un'osservazione che ci gioverà al n. 8.

Dico ora che per dimostrare il teorema I, basta limitarsi a considerare il caso in cui i $\mu + 1$ sistemi A, A_1, \dots, A_μ , sono a μ a μ indipendenti. Supponiamo, perciò, che il teorema sia già stato dimostrato sotto questa condizione, e si consideri il caso in cui la condizione stessa non è soddisfatta. Allora lo spazio A s'appoggerà a qualcuno degli spazi $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\mu$. Si appoggi, p. es., a Σ_μ , e sia A' lo spazio a $q' - 1$ ($q' \leq q$) dimensioni, intersezione di A e di Σ_μ . Avremo entro al sistema regolare Σ_μ , congiungente dei sistemi indipendenti $A_1, A_2, \dots, A_{\mu-1}$, un sistema regolare A' , indipendente da ciascuno di essi. Se i μ sistemi $A', A_1, \dots, A_{\mu-1}$ sono a $\mu - 1$ a $\mu - 1$ indipendenti, si potrà applicare il teorema I; se no, si proseguirà similmente, passando da μ sistemi a $\mu - 1$, e così via.

Si perverrà infine ad un sistema regolare $A^{(j)}$, di dimensione $q^{(j)} - 1$, contenuto in A , e a cui sarà applicabile il teorema I, per modo che $A^{(j)}$ apparterrà ad un'infinità discontinua di sistemi analoghi.

Detto $B^{(j)}$ un complementare di $A^{(j)}$ in A , i sistemi che congiungono $B^{(j)}$ con quelli della suddetta infinità discontinua, saranno altrettanti sistemi regolari di dimensione $q^{(j)} - 1$. E il teorema I risulterà pertanto stabilito, anche a prescindere dalla restrizione posta.

Esaminiamo dunque il caso in cui gli spazi A, A_1, \dots, A_μ sono a μ a μ indipendenti. Da ogni punto di A esce allora ⁽²⁾ uno, ed un solo spazio, $S_{\mu-1}$, appoggiato ulteriormente in un punto ad A_1, A_2, \dots, A_μ . Fissato uno, C , di questi $q^{\mu-1} S_{\mu-1}$, su esso, A, A_1, \dots, A_μ segnano rispettivamente $\mu + 1$ punti indipendenti a, a_1, \dots, a_μ , i quali possono assumersi come base di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$; ed è chiaro che gli spazi dedotti da A, A_1, \dots, A_μ con operazioni interne di proiezione e di sezione, restano biunivocamente coordinati alle loro traccie su C , cioè agli spazi $S_0, S_1, \dots, S_{\mu-2}$, appartenenti alla suddetta rete. Cosicchè quegli spazi risultano in numero infinito come queste traccie. In particolare, agl'infiniti vertici della rete restano coordinati infiniti S_{q-1} , rappresentanti altrettanti sistemi regolari.

Resta così dimostrato il teorema I, e si vede inoltre come gl'infiniti sistemi regolari $q^{\mu-1}$, deducibili dai $\mu + 1$ sistemi dati, possan coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$.

Ciò dà l'esatta struttura dell'infinità discontinua formata dai sistemi regolari $q^{\mu-1}$, appartenenti alla nostra varietà: gli elementi di quell'infinità sono infatti assimilabili ai punti razionali di uno spazio $S_{\mu-1}$.

(¹) Cfr., p. es., Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, ecc. (Pisa, Spoerri, 1907), pp. 12-13. Qui, veramente, si considera lo spazio comune alle proiezioni di $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\mu$ da un generico punto di K . Ma, nel caso nostro, vale lo stesso ragionamento.

(²) Ved. Bertini, loc. cit.

L'unico caso che sfugge alla dimostrazione precedente, è quello $\mu = 2$, giacchè allora C è una retta. Ma in tal caso si procederà come nell'osservazione alla fine del n. 3. Si comincerà cioè coll'ampliare il sistema K , facendone la proiezione da un sistema B d'integrali riducibili, identico, per esempio, ad A ; e si osserverà che il sistema L , \propto^{2q-1} , congiungente A, B , contiene infiniti sistemi analoghi ad A, B , ognuno dei quali si ottiene combinando linearmente, con due prefissati coefficienti interi, le coppie d'integrali corrispondenti di A, B . Si può pertanto assumere in L un sistema A' — indipendente da A, B — per guisa che i quattro sistemi A', B, A_1, A_2 siano a tre a tre indipendenti. Si ricade allora nel caso $\mu = 3$, e si conclude che nel sistema K esistono infiniti sistemi regolari \propto^{q-1} , biunivocamente coordinati ai vertici di una rete di Möbius di specie 1.

OSSERVAZIONE. — Se la varietà V possiede almeno due sistemi regolari indipendenti A, B d'integrali riducibili, tali che B sia indipendente anche da un complementare C di A , poichè A, C sono pur essi indipendenti, e, d'altra parte, al loro sistema congiungente S appartiene B , applicando il teorema precedente ($\mu = 2$), si ha che:

Una varietà algebrica, la quale possegga due sistemi regolari indipendenti A, B d'integrali riducibili, tali che l'uno, B , di essi, sia indipendente anche dal sistema complementare di A , contiene in conseguenza tutta un'infinità discontinua di sistemi regolari, della stessa dimensione di A o di B .

Da ciò segue che se il complementare di un dato sistema regolare A , non è individuato, la varietà contiene infiniti sistemi regolari, della stessa dimensione di A . Invero, se B, C son due diversi complementari di A , e se essi son tra loro indipendenti, vale quanto precede. Se invece B, C hanno in comune un sistema (regolare) D , il complementare E di D , p. es., entro C , è indipendente da A e da B , e quindi si ricade ancora nel caso precedente.

5. CONFIGURAZIONI NORMALI DI SISTEMI D'INTEGRALI RIDUCIBILI. — La costruzione geometrica esposta nel n. 4, si può determinare ulteriormente, qualora si supponga che gli spazi A, A_1, \dots, A_μ , a μ a μ indipendenti, abbiano la stessa dimensione $q - 1$.

Ma prima di occuparci di ciò, mostriamo come a questo caso ci si possa sempre ridurre, quando V possegga infiniti sistemi regolari d'integrali riducibili.

È invero ben chiaro, anzitutto, che, in tale ipotesi, esisteranno sempre $\mu + 1$ ($\mu \geq 2$) sistemi regolari A, A_1, \dots, A_μ , nelle condizioni dell'enunciato del teorema I. Si può inoltre ammettere (n. 4) che gli spazi A, A_1, \dots, A_μ siano a μ a μ indipendenti, e, quindi (poichè il loro spazio congiungente K ha la dimensione $\sum q_i - 1$), che $q \leq q_i$ ($i = 1, 2, \dots, \mu$).

Poniamo precisamente $q \leq q_1 \leq q_2 \dots \leq q_\mu$. Allora lo spazio Σ , congiungente $A, A_1, \dots, A_{\mu-1}$, incontra A_μ in uno spazio A'_μ di dimensione $q-1$, per modo che entro a Σ si hanno $\mu+1$ sistemi $A, A'_\mu, A_1, \dots, A_{\mu-1}$, di dimensioni rispettive $q-1, q-1, q_1-1, \dots, q_{\mu-1}-1$, a μ a μ indipendenti. Lo spazio Σ' congiungente $A, A'_\mu, \dots, A_{\mu-2}$, incontra similmente $A_{\mu-1}$ secondo uno spazio $A'_{\mu-1}$, di dimensione $q-1$; ecc. Così proseguendo, si ottengono, entro uno spazio a $\mu q-1$ dimensioni, $\mu+1$ spazi a $q-1$ dimensioni, che indicheremo ancora con A, A_1, \dots, A_μ , a μ a μ indipendenti, e rappresentanti altrettanti sistemi regolari d'integrali riducibili.

Gl'infiniti sistemi regolari dedotti da A, A_1, \dots, A_μ , con operazioni interne di proiezione e di sezione, si diranno costituire una *configurazione normale di sistemi* ∞^{q-1} d'integrali riducibili.

6. IL MINIMO CONTINUO CUI APPARTENGONO GL'INFINITI SISTEMI DI UNA CONFIGURAZIONE NORMALE. — Nello spazio K , di dimensione $\mu q-1$, sieno A, A_1, \dots, A_μ i dati spazi a $q-1$ dimensioni, a μ a μ indipendenti, immagini di altrettanti sistemi regolari.

Vi sono ∞^{q-1} spazi C , a $\mu-1$ dimensioni, i quali s'appoggiano (in un punto) a ciascuno degli A . Essi riempiono una varietà, evidentemente razionale, M , a $\mu+q-2$ dimensioni, di cui vogliamo indicare rapidamente le più importanti proprietà, che si stabiliscono con elementari considerazioni di geometria proiettiva iperspaziale.

Due spazi A sono punteggiati omograficamente dagli spazi C , così che la varietà M può anche definirsi come il luogo degli spazi congiungenti le μ -ple di punti omologhi tolti da μ spazi S_{q-1} omografici. Ne deriva che q generici spazi C sono indipendenti, e che ogni S_{q-1} , il quale incontri $q+1$ spazi C generici (vi sono $\infty^{\mu-1}$ spazi S_{q-1} siffatti), incontra ogni altro C , cioè appartiene ad M .

La varietà M viene pertanto a contenere due schiere H_a, H_c , rispettivamente $\infty^{\mu-1}, \infty^{q-1}$ di spazi $S_{q-1}, S_{\mu-1}$: per ogni punto di M passa uno spazio dell'una schiera e uno spazio dell'altra; μ o, rispettivamente, q spazi generici della 1^a o della 2^a schiera, sono tra loro indipendenti; due spazi di una schiera sono punteggiati omograficamente da quelli dell'altra. Alla schiera H_a appartengono evidentemente gli spazi A dati.

Indichiamo, al solito, con Σ_i ($i=1, 2, \dots, \mu$) lo spazio che congiunge $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_\mu$. Per Σ_i passa un sistema lineare L_i, ∞^{q-1} di spazi $S_{(\mu-1)q}$ e, preso uno spazio di ciascuno degli L , resta individuato, come intersezione dei μ spazi scelti, un $S_{\mu-1}$, il quale appoggiasi ad A_1, A_2, \dots, A_μ (¹). Ne deriva che gli spazi generatori della schiera H_c possono tutti ottenersi come intersezioni di μ $S_{(\mu-1)q}$ omologhi in una pro-

(¹) Bertini, loc. cit., pp. 12-13.

spettività, che nasce tra i sistemi L , prendendo per corrispondenti due spazi uscenti da un medesimo punto di A . In maniera analoga si potrebbero ottenere gli spazi della schiera H_a , a partire da $q+1$ spazi generatori di H_c .

Se indichiamo con

$$v_1 f_1^{(i)} + \dots + v_q f_q^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

le equazioni dei sistemi lineari di iperpiani passanti per $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\mu$, e supponiamo le f scelte in modo che nella prospettiva d'asse A sieno omologhi μ iperpiani corrispondenti agli stessi valori delle v , la M viene rappresentata dall'annullare i minori di secondo ordine della matrice delle f , ed ha quindi ⁽¹⁾ l'ordine $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.

È chiaro che uno spazio S_{q-1} , il quale sia deducibile con operazioni interne di proiezione e di sezione (in particolare, mediante costruzioni di quarti armonici), dagli spazi A, A_1, \dots, A_μ , appoggiasi in un punto a ciascuno dei C e quindi giace nella schiera H_a . Gli infiniti spazi generatori di H_a , che si ottengono con tali operazioni, si può dire che formano una rete R di Möbius, la quale ha come « base » $\mu+1$ spazi S_{q-1} a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu q-1}$ (mentre quella considerata al n. 3, aveva come base un gruppo di $\mu+1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$).

Ogni varietà continua, che, entro allo spazio ambiente S_{p-1} , contenga tutti gli S_{q-1} di R , dovrà contenere anche gli spazi-limiti di quelli, cioè tutti gli spazi generatori di H_a .

Si conclude pertanto:

II. Quando una varietà (o curva) algebrica V contiene $\mu+1$ sistemi regolari A, A_1, \dots, A_μ ($\mu \geq 2$), ∞^{q-1} , a μ a μ indipendenti, ma congiunti da un sistema K , $\infty^{\mu q-1}$, d'integrali riducibili di 1^a specie, essa contiene in conseguenza infiniti altri sistemi regolari ∞^{q-1} , i quali costituiscono la rete di Möbius, di specie $\mu-1$, che ha come base A, A_1, \dots, A_μ . Il minimo continuo contenente quest'infiniti sistemi, entro alla totalità degl'integrali semplici di 1^a specie di V , è una varietà razionale M , di dimensione $\mu+q-2$ e di ordine $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.

Ogni varietà algebrica con infiniti sistemi d'integrali riducibili, possiede, per convenienti valori degl'interi μ, q , una siffatta configurazione di sistemi regolari.

7. ESISTENZA EFFETTIVA DI VARIETÀ ALGEBRICHE SODDISFACENTI ALLE IPOTESI DEI PRECEDENTI TEOREMI. — I teoremi fin qui dimostrati

⁽¹⁾ Cfr. Segre, Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei (5), tomo IX, 1900, pag. 253.

lasciano in sospeso la questione d'esistenza di varietà, godenti delle proprietà indicate.

Fissato il numero p degl'integrali semplici, indipendenti di 1^a specie, d'una varietà algebrica — cioè la dimensione della relativa varietà di Picard — e scelti $\mu + 1$ interi positivi, non nulli, q, q_1, \dots, q_μ ($q \leq q_1 \leq \dots \leq q_\mu$), tali che $q_1 + \dots + q_\mu \leq p$, si può costruire una varietà di Picard V_p , per la quale sieno soddisfatte le ipotesi del teorema I, e per conseguenza anche quelle del II?

Veramente, al n. 4 non si supposeva che q fosse il più piccolo dei $\mu + 1$ interi fissati: ma, come abbiamo avvertito al n. 5, tale condizione, in realtà, non è restrittiva. La questione di ricercare se possa esistere una V_p contenente $\mu + 1$ sistemi regolari, rispettivamente di q, q_1, \dots, q_μ , integrali riducibili, a μ a μ indipendenti fra loro, ma congiunti da un sistema di dimensione $\sum q_i - 1$, in sostanza riducesi a esaminare se le equazioni lineari omogenee, a coefficienti interi, che, in virtù delle ipotesi poste, vengono a legare i periodi normali degl'integrali di V_p , sieno compatibili colle note disuguaglianze esprimenti appunto le condizioni di esistenza di V_p ⁽¹⁾.

Noi verificheremo *a priori* tale compatibilità, mostrando come si possa costruire un particolare modello di V_p , soddisfacente alle suddette ipotesi.

A tal uopo si consideri anzitutto la varietà picardiana W , di dimensione μq , i cui elementi sono la μ -ple di punti tolti rispettivamente da μ varietà picardiane di dimensione q , *birazionalmente identiche* fra loro, ma, del resto, affatto qualunque. A W appartengono μ sistemi regolari D_1, D_2, \dots, D_μ :

$$u'_1, \dots, u'_q; u''_1, \dots, u''_q; \dots; u^{(\mu)}_1, \dots, u^{(\mu)}_q,$$

identici fra loro (n. 2). Si verifica subito che il sistema D , individuato dagl'integrali

$$v_1 = u'_1 + \dots + u^{(\mu)}_1, \dots, v_q = u'_q + \dots + u^{(\mu)}_q$$

ha la dimensione $q - 1$, è regolare ed identico ai D_i . Inoltre è chiaro che D, D_1, \dots, D_μ sono a μ a μ indipendenti. La W è insomma nelle condizioni contemplate dal teorema II, e contiene pertanto una configurazione normale di sistemi regolari ∞^{q-1} .

Ciò posto, fissiamo $\mu + 1$ picardiane $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(\mu)}$, di dimensioni rispettive $p - \sum q_i, q_1 - q, \dots, q_\mu - q$; e consideriamo la picardiana Φ delle $(\mu + 2)$ -ple di punti tolti da esse e da W . Avremo in Φ $\mu + 1$ sistemi regolari D, D_1, \dots, D_μ , immagini dei sistemi omonimi di W , e altri $\mu + 1$ sistemi regolari C, C_1, \dots, C_μ immagini dei sistemi d'integrali appartenenti

⁽¹⁾ Ved. p. es. Krazzer, op. cit., pag. 17.

rispettivamente a $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(\mu)}$. Indichiamo con A_1, \dots, A_μ i sistemi congiungenti rispettivamente di $C_1, D_1; \dots; C_\mu, D_\mu$. Allora i $\mu + 1$ sistemi $A(=D), A_1, \dots, A_\mu$ saranno a μ a μ indipendenti, ed il loro sistema congiungente, il cui complementare è C , avrà la dimensione $\Sigma q_i - 1$. La Φ soddisfa pertanto alle ipotesi del teorema I. Si conclude che se q, q_1, \dots, q_μ sono $\mu + 1$ interi positivi, non nulli ($q \leq q_1 \leq \dots \leq q_\mu$), soddisfacenti alla disuguaglianza $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu \leq p$, esiste sempre una varietà algebrica possedente p (e soltanto p) integrali semplici di 1^a specie, per la quale si verificano tutte le condizioni del teorema I.

È superfluo di avvertire che questa conclusione non è senz'altro applicabile alle curve di genere $p > 3$, perchè i periodi normali dei loro integrali di 1^a specie, sono legati da $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ relazioni, delle quali non si

può a priori affermare la compatibilità colle condizioni suddette. È però certo che, una volta scelti gl'interi q, q_1, \dots, q_μ , si può sempre costruire una curva di genere $\pi(\geq p)$, abbastanza alto, soddisfacente al teorema I. Basterà all'uopo considerare una curva generica tracciata sopra una varietà con p integrali semplici di 1^a specie, che soddisfaccia al teorema suddetto.

Per le superficie (o varietà algebriche superiori) non havvi invece alcune limitazione, perchè, come hanno dimostrato Castelnuovo-Enriques (¹), i periodi normali degl'integrali semplici di 1^a specie d'una superficie (o varietà) possono scegliersi del tutto ad arbitrio, compatibilmente colle già ricordate disuguaglianze.

Si può in conseguenza affermare p. es. che:

Dati ad arbitrio gl'interi positivi p, μ ($\mu \leq p$), esiste sempre una superficie algebrica F , d'irregolarità p , contenente un'infinità discontinua di fasci ellittici di curve, tale che gli elementi (fasci) di quest'infinità possano rappresentarsi biunivocamente coi punti razionali di uno spazio a $\mu - 1$ dimensioni.

In particolare, nel caso $\mu = p$, su F esistono infiniti integrali ellittici infinitamente vicini ad ogni integrale semplice di 1^a specie della superficie.

8. DIMOSTRAZIONE ANALITICA DEL TEOREMA I. — Poniamoci ora nuovamente nelle ipotesi del teorema I, e conserviamo le notazioni del n. 4.

Siano $u_1^{(i)}, \dots, u_{q_i}^{(i)}$ q_i integrali indipendenti di $A_i (i = 1, 2, \dots, \mu)$;

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}$ $2p$ cicli lineari primitivi della data varietà V , ed $\omega_{11}^{(i)}, \dots, \omega_{l, 2q_i}^{(i)}$ ($l = 1, 2, \dots, q_i$) i periodi ridotti di $u_l^{(i)}$, talechè il periodo di $u_l^{(i)}$ al ciclo

(¹) *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, Annales scientifiques de l'École normale supérieure de Paris, (3), tomo XXIII, 1906, pp. 339-366.

σ_h ($h=1, 2, \dots, 2p$) si potrà scrivere sotto la forma $\sum_{s=1}^{2q_i} m_{hs}^{(i)} \omega_{is}^{(i)}$, ove le m sono interi non tutti nulli, *indipendenti*, per un dato i , dall'indice l . Allora l'integrale generico

$$(1) \quad u = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{q_i} \lambda_i^{(i)} u_i^{(i)}$$

di K , avrà lungo σ_h il periodo

$$\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{2q_i} m_{hs}^{(i)} \sum_{l=1}^{q_i} \lambda_i^{(i)} \omega_{ls}^{(i)},$$

sicchè i suoi $2(q_1 + \dots + q_{\mu})$ periodi ridotti, ulteriormente irriducibili (n. 1),

saranno $\sum_{l=1}^{q_i} \lambda_i^{(i)} \omega_{ls}^{(i)}$ ($s=1, 2, \dots, 2q_i$; $i=1, 2, \dots, \mu$); e la matrice della sostituzione lineare esprimente i $2p$ periodi fondamentali pei periodi ridotti, sarà:

$$(2) \quad \left\| m_{h1}^{(1)}, m_{h2}^{(1)}, \dots, m_{h, 2q_1}^{(1)}, \dots, m_{h1}^{(\mu)}, m_{h2}^{(\mu)}, \dots, m_{h, 2q_{\mu}}^{(\mu)} \right\| \quad (h=1, 2, \dots, 2p).$$

Questa matrice è diversa da zero, cioè non sono nulli tutti i suoi minori d'ordine $2(q_1 + \dots + q_{\mu})$, perchè altrimenti il numero dei periodi degl'integrali di K si ridurrebbe ulteriormente.

Suppongasi ora che al sistema K appartenga un altro sistema regolare A, ω^{q-1} , il quale sia indipendente da A_1, A_2, \dots, A_{μ} . Sieno $\lambda_{lr}^{(i)}$ ($r=1, 2, \dots, q$) i valori che vanno attribuiti alle $\lambda_i^{(i)}$ nella (1), per ottenere q integrali indipendenti di A e $\theta_{r1}, \theta_{r2}, \dots, \theta_{r, 2q}$ i periodi ridotti dell'integrale r -esimo ($r=1, 2, \dots, q$). Sussisteranno allora le relazioni

$$(3) \quad \sum_i \sum_s m_{hs}^{(i)} \sum_l \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2q} n_{hj} \theta_{rj},$$

$$(r=1, \dots, q; h=1, 2, \dots, 2p),$$

le n essendo interi non tutti nulli, indipendenti dall'indice r . Considerando queste relazioni, per un r fissato, come equazioni lineari nelle $2(q_1 + \dots + q_{\mu})$ quantità $\sum_l \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)}$, poichè esse son soddisfatte per valori non tutti nulli di queste quantità (chè altrimenti l' r -esimo integrale di A si ridurrebbe ad una costante, in quanto avrebbe nulli tutti i suoi periodi ridotti), la matrice formata dai coefficienti e dai termini noti delle suddette equazioni, dovrà essere nulla.

Se ora si tien conto che fra le θ_{rj} non può sussistere alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi (indipendenti dall'indice r), perchè altrimenti gl'integrali di A avrebbero meno di $2q$ periodi ridotti, si conclude che è nulla la matrice

$$(4) \quad \left\| m'_{h1}, m'_{h2}, \dots, m'_{h, 2q_1}, \dots, m_{h1}^{(\mu)}, \dots, m_{h, 2q_\mu}^{(\mu)}, n_{hj} \right\| \quad (h = 1, 2, \dots, 2p),$$

per qualunque indice j ($j = 1, 2, \dots, 2q$).

Ciò posto, indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$, μ interi arbitrari tutti diversi da zero, e con δ il loro minimo comune multiplo. Le (3) possono anche scriversi sotto la forma

$$(5) \quad \sum_i \sum_s \bar{m}_{hs}^{(i)} \sum_l \alpha_i \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)} = \sum_j \bar{n}_{hj} \theta_{rj},$$

ove si è posto

$$\bar{m}_{hs}^{(i)} = \frac{m_{hs}^{(i)} \delta}{\alpha_i}, \quad \bar{n}_{hj} = n_{hj} \delta.$$

Nelle (5), i determinanti d'ordine $2(q_1 + \dots + q_\mu)$ estratti dalla matrice dei coefficienti \bar{m} , uguagliamo evidentemente i corrispondenti determinanti della matrice (2), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta = \frac{\delta^{2(q_1 + \dots + q_\mu)}}{\alpha_1^{2q_1} \alpha_2^{2q_2} \dots \alpha_\mu^{2q_\mu}}$; e quindi anche la matrice degl'interi \bar{m} è diversa da zero. Similmente, i determinanti d'ordine $2(q_1 + \dots + q_\mu) + 1$ estratti dalla matrice delle \bar{m} e delle \bar{n} (per un fissato j), uguagliano i determinanti corrispondenti estratti dalle (4), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta\delta$; laonde la matrice delle \bar{m}, \bar{n} è nulla, come la (4).

Ne segue che dalle (5), per r fissato, si possono ricavare le $2(q_1 + \dots + q_\mu)$ quantità $\sum_i \alpha_i \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)}$ come combinazioni lineari a coefficienti razionali indipendenti dall'indice r , delle θ_{rj} . Ponendo $r = 1, 2, \dots, q$, si hanno pertanto q integrali $v_r = \sum_i \sum_l \alpha_i \lambda_{lr}^{(i)} u_l^{(i)}$ coi $2q$ periodi ridotti — ma non generalmente primitivi — θ . Affinchè si possa però affermare che il sistema B individuato dagl'integrali v_r , è regolare, occorre provare che i q integrali stessi sono indipendenti, giacchè allora, e solo allora, ne seguirà che i $2q$ periodi θ sono ulteriormente irriducibili.

Non essendovi alcun legame lineare fra gl'integrali $u_l^{(i)}$, se vi fosse un legame lineare fra gl'integrali v_r , sussisterebbero, per valori non tutti nulli delle v , le relazioni lineari

$$\sum_{r=1}^q v_r \lambda_{lr}^{(i)} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, q_i; i = 1, 2, \dots, \mu),$$

ed allora sarebbero dipendenti anche gl'integrali scelti entro A. Pertanto il sistema B è regolare e ∞^{2-1} , qualunque sieno gl'interi non nulli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$.

Ma per poter da ciò dedurre che la varietà possiede infiniti sistemi regolari ∞^{2-1} , occorre provare che a due gruppi generici di valori delle α — e sieno $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_\mu); (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_\mu)$ — corrispondono due sistemi regolari distinti B', B''.

Si ammetta, se è possibile, che B', B'' coincidano. Allora la matrice che ha per orizzontale s^{esima} ($r = 1, \dots, q$)

$$(6) \quad \alpha'_1 \lambda'_{1r}, \alpha'_1 \lambda'_{2r}, \dots, \alpha'_1 \lambda'_{q_1r}, \dots, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{1r}, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{2r}, \dots, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{q_\mu r},$$

e per orizzontale $(q+1)^{esima}$

$$(7) \quad \alpha''_1 \lambda'_{1s}, \alpha''_1 \lambda'_{2s}, \dots, \alpha''_1 \lambda'_{q_1s}, \dots, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{1s}, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{2s}, \dots, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s},$$

ove s è un intero fissato nella successione $1, 2, \dots, q$, dovrà esser nulla, giacchè il suo annullarsi esprime appunto che l'integrale di B'', corrispondente ai valori (7) dei parametri, è contenuto in B'. Sottraendo dall'orizzontale (7) la s^{esima} delle (6) moltiplicata per $\frac{\alpha'_i}{\alpha'_i}$ (ove i è fissato), la nuova matrice, pure nulla, che così si ottiene, viene ad esprimere, col suo annullarsi, che B' ha un integrale comune col sistema Σ_i , definito al n. 4. Questo integrale comune corrisponde ai valori

$$(8) \quad \frac{\alpha'_1 \alpha'_i - \alpha''_1 \alpha'_i}{\alpha'_i} \lambda'_{1s}, \dots, \frac{\alpha'_1 \alpha'_i - \alpha''_1 \alpha'_i}{\alpha'_i} \lambda'_{q_1s}, \dots, \\ 0, \dots, 0, \dots, \frac{\alpha'_\mu \alpha'_i - \alpha''_\mu \alpha'_i}{\alpha'_i} \lambda^{(\mu)}_{1s}, \dots, \frac{\alpha'_\mu \alpha'_i - \alpha''_\mu \alpha'_i}{\alpha'_i} \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s}$$

dei parametri. Facendo $s = 1, 2, \dots, q$, si ottengono così q integrali comuni a B' ed a Σ_i , ed è facile vedere che sono integrali indipendenti. Infatti, qualora essi fossero dipendenti, sarebbe nulla la matrice di cui (8) è la orizzontale s^{esima} ($s = 1, \dots, q$), la qual matrice, previa la soppressione dei fattori *non nulli* (per la genericità delle α', α'') comuni alle sue singole verticali, riducesi a quella che ha per orizzontale s^{esima}

$$\lambda'_{1s}, \dots, \lambda'_{q_1s}, \dots, 0, \dots, 0, \dots, \lambda^{(\mu)}_{1s}, \dots, \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s}.$$

L'annullarsi di questa matrice porterebbe a ciò: che l'integrale di A,

$$\sum_{r=1}^q \varepsilon \sum_{j=1}^\mu \sum_{i=1}^{q_j} \lambda^{(j)}_{ir} u^{(j)}_i, \text{ ove le } \varepsilon \text{ son costanti convenienti non tutte nulle, si}$$

ridurrebbe ad una combinazione lineare dei soli integrali $u_1^{(t)}, \dots, u_{q_s}^{(t)}$ di A_i , ed esisterebbe perciò un integrale comune ad A, A_i ; contro il supposto.

Si può pertanto affermare che, se B' coincide con B'' , il sistema B' ha in comune con Σ_i , qualunque sia $i (= 1, 2, \dots, q)$, q integrali indipendenti, cioè che B' è contenuto in Σ_i . I sistemi $\Sigma_1, \dots, \Sigma_q$ vengono pertanto ad avere in comune (almeno) un sistema B' di dimensione $q - 1 (> 0)$. Ora, come abbiamo già osservato al n. 4. ciò non può accadere, se i sistemi A_1, \dots, A_p dati son tra loro indipendenti. Resta così dimostrato, anche per via analitica, il teorema I.

Meccanica. — *Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti.* Nota del Corrispondente E. ALMANSI.

1. Una massa fluida, omogenea, incompressibile, ruoti intorno ad un asse con velocità angolare costante ω .

Assumiamo l'asse di rotazione come asse delle z ; gli assi delle x e delle y siano collegati colla massa in movimento.

Denotando con V il potenziale newtoniano della massa fluida, in tutti i punti della superficie σ che limita lo spazio S da essa occupato, deve aversi:

$$U = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{cost.}$$

Diciamo ρ la densità del fluido, k la costante dell'attrazione, e poniamo:

$$U = k\rho u, \quad V = k\rho v, \\ \omega^2 = 2\alpha k\rho.$$

Nei punti di σ dovrà essere:

$$(1) \quad u = v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}, \quad \alpha = \text{cost} > 0.$$

Poichè v è il potenziale, per $k = 1$, di una massa di densità 1 che occupi lo spazio limitato da σ , le formule (1) ci danno una condizione di natura puramente geometrica, necessaria affinchè la superficie σ possa rappresentare una figura d'equilibrio.

Denoterò con (a) questa condizione: la condizione, cioè, che nei punti di σ si abbia $v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}$, α essendo una costante positiva.

Ad una superficie σ che verifichi la condizione (a) corrisponde un determinato valore della velocità angolare ω , dato dalla formula $\omega^2 = 2\alpha k\rho$.

Alla condizione (a) se ne aggiunge ordinariamente una seconda, la quale viene formulata scrivendo che in tutti i punti di σ deve aversi:

$$\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0 \quad (n_i = \text{normale int.}).$$

Se diciamo p la pressione, U_0 il valore costante di U sopra σ , si ha, in un punto qualunque della massa fluida:

$$p = \varrho(u - u_0).$$

La condizione $\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0$ significa dunque che la pressione, supposta nulla nei punti di σ , deve risultare positiva nei punti infinitamente vicini.

Consideriamo la condizione più generale che in tutto lo spazio S occupato dalla massa fluida, ad eccezione della superficie, ove si suppone $p = 0$, sia $p > 0$. Diremo (b) questa seconda condizione.

L'osservazione, oggetto della Nota, è la seguente: che la condizione (b) non aggiunge niente alla condizione (a); che, in altre parole, per tutte quelle superficie per cui è verificata la condizione (a), è verificata anche la (b). La condizione (a) è dunque necessaria e sufficiente affinché σ possa rappresentare una figura d'equilibrio. Il quadrato della velocità angolare dovrà essere uguale a $2\alpha k\varrho$. E quei limiti superiori che, per determinati valori di k e ϱ , si possono assegnare ad ω , o nel caso generale, o per classi speciali di superficie (limiti che per solito vengono messi in rapporto colla condizione $\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0$), non dipendono se non da limiti entro i quali è contenuta, nei diversi casi, la costante (di natura geometrica) α .

2. Poichè $U = k\varrho u$, ed $U_0 = k\varrho u_0$ (se u_0 denota il valore costante di u sopra σ), avremo:

$$p = k\varrho^2(u - u_0).$$

Dobbiamo dunque dimostrare che in tutti i punti situati nell'interno dello spazio S , u è maggiore di u_0 .

Consideriamo sopra σ un punto P_0 tale che rispetto al piano normale all'asse della z , passante per P_0 , la superficie σ si trovi tutta dalla stessa parte; e tale inoltre che, supponendo di aver assegnato all'asse delle z un verso positivo, la retta $P_0 z$, avendo la direzione e il verso dell'asse, sia rivolta verso la parte in cui si trova σ . Noi supporremo che la retta $P_0 z$ penetri nell'interno dello spazio S , come avverrà, per esempio, se σ ammette in P_0 un piano tangente determinato.

Nel punto P_0 l'attrazione sarà rivolta dalla parte di σ : sarà cioè $\frac{\partial v}{\partial z} > 0$. Ma per la (1) $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$; quindi $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$. Ora nel punto P_0 u è

uguale ad u_0 , dunque nell'interno dello spazio S, in cui penetra la retta P_0x , dovranno esservi dei punti nei quali u è maggiore di u_0 . E la funzione u avrà nello spazio S un valore massimo u' maggiore di u_0 .

Sia τ una sfera di centro P, di raggio R, tutta contenuta nello spazio S. Essendo $\Delta^2 u = \Delta^2 v + 4\alpha = -4(\pi - \alpha)$, sussisterà la relazione (che si ottiene applicando il *teorema della media* di Gauss alla funzione *armonica* $u + \frac{2}{3}(\pi - \alpha)(r^2 - R^2)$, ove r denota la distanza di un punto qualunque dal centro P della sfera):

$$u(P) = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} u d\tau + \frac{2}{3} R^2 (\pi - \alpha).$$

Se ne deduce che non può essere $\pi - \alpha \leq 0$: altrimenti sarebbe

$$u(P) \leq \frac{1}{\tau} \int_{\tau} u d\tau,$$

mentre questa relazione non risulterà verificata se si suppone che P sia un punto in cui la funzione u abbia il valore massimo u' , ma che almeno in una parte di τ , u sia diversa da u' , quindi minore di u' .

Sarà pertanto $\pi - \alpha > 0$, ossia

$$\alpha < \pi.$$

E la formula (2) darà:

$$u(P) > \frac{1}{\tau} \int_{\tau} u d\tau.$$

Di qui vediamo che se u'' è il *minimo* valore di u nell'intero spazio S, non può essere $u = u''$ in nessun punto P situato nell'interno di S. Vale a dire: il minimo valore di u è il valore u_0 che u assume sulle superficie; e in nessun punto situato nell'interno di S u può essere uguale ad u_0 , ma dovrà essere ovunque $u > 0$; c. v. d..

Rimane così provato che se la pressione è nulla in superficie, essa è positiva in tutti i punti situati nell'interno dello spazio S. Ciò avverrà a maggior ragione se la pressione ha, in una superficie, un valore (costante) positivo.

Dalla formula $\alpha < \pi$, che è verificata per qualunque superficie σ sulla quale si abbia $v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost}$, deriva, per il quadrato della velocità angolare, il limite $2\pi k\rho$ stabilito dal Poincaré (1).

(1) *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, pag. 11. Il dott. Crudeli ha poi dimostrato che se la superficie σ è convessa in ogni suo punto, deve essere $\omega^2 < \pi k\rho$ (ossia $\alpha < \frac{\pi}{2}$): *Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei*, ecc., Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1910, pag. 666.

3. Possiamo riassumere le cose dette, nel modo seguente:

O la condizione (a), per una data superficie σ e per un dato asse di rotazione, è verificata; e la superficie σ è una figura d'equilibrio, purchè la velocità angolare di rotazione sia uguale a $\sqrt{2\alpha k\rho}$, e la pressione superficiale abbia un valore costante, nullo o positivo.

O la condizione (a) non è verificata; e l'equilibrio non può aver luogo per nessun valore della velocità di rotazione, e per nessun valore (costante) della pressione in superficie.

Non vi è dunque nessun caso in cui l'equilibrio non sussista quando la pressione in superficie è nulla, e sussista invece se la pressione stessa ha un valore sufficientemente grande.

Chimica. — *Sulla tribenzoina*. Nota del Corrisp. L. BALBIANO ⁽¹⁾.

Una Memoria di A. Lipp e P. Miller ⁽²⁾ pubblicata nell'Agosto passato, di cui ebbi notizia soltanto al principio di quest'anno dal sunto del Chem. Zentralblatt. ⁽³⁾ mi obbligò a ripetere alcune esperienze sulla formazione e saponificazione della tribenzoina delle quali rendo conto in questa breve Nota.

Nel 1902 in una Memoria *Sulla saponificazione della tribenzoina* ⁽⁴⁾ ho cercato di dimostrare che le deduzioni chimico-fisiche del Geitel ⁽⁵⁾ e quelle chimiche alle quali era pervenuto il Lewkowsch ⁽⁶⁾ dall'aumento del numero di acetile nei grassi insaponificati, e le variazioni del numero di Hener, si potevano spiegare in altro modo senza ricorrere all'ipotesi della saponificazione graduale, come supponevano i due chimici sucitati.

Le esperienze, istituite allora, mi dimostrarono che nella saponificazione parziale della tribenzoina con una quantità minima di alcoolato sodico in presenza di alcool assoluto (*alcoolyse* di Haller 1906) si aveva glicerina, benzoato di etile e tribenzoina inalterata, e nella saponificazione in mezzo eterogeneo, cioè colla soluzione acquosa al 10 % di idrato sodico, si aveva benzoato sodico, glicerina e tribenzoina. D'altra parte l'eterificazione della glicerina mediante il cloruro di benzoile col processo del Baumann mi dava esclusivamente la tribenzoina solida, cristallizzata, quantunque le quan-

⁽¹⁾ Dal laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

⁽²⁾ I., pr. 88 (1913), 361.

⁽³⁾ C., (1913), II, 1560.

⁽⁴⁾ G. (1902), 265; (1903) 312.

⁽⁵⁾ I., pr. 55 (1897), 429.

⁽⁶⁾ B., 33 (1900), 89.

tà rispettive di glicerina e cloro-anidride fossero nei rapporti stechiometrici di numero eguale di molecole.

Queste due serie di fatti mi autorizzavano allora ad appoggiare l'idea che tanto la saponificazione quanto l'eterificazione della glicerina non avveniva per gradi come altri chimici supponevano.

Il lavoro fatto in questi ultimi dieci anni in difesa delle due ipotesi, riassunto fedelmente nella Memoria di A. Lipp e P. Miller, dimostra all'evidenza quanto fosse fantastica l'asserzione del compianto Lewkowitch nella interessante conferenza alla società chimica francese nel 1909 « on a démontré d'une manière presque irréfutable que l'hydrolyse s'opère en trois phases » e potrei incominciare questa Nota colle precise parole adoperate nel mio scritto del 1902. « Il meccanismo della saponificazione delle sostanze grasse è un problema sempre discusso, e le ricerche per dilucidare questa questione, che ha una notevole importanza teorica e tecnica, sono ancora fra quelle messe all'ordine del giorno ».

La Memoria di A. Lipp e P. Miller dà ora un notevole impulso alla risoluzione del problema nel senso della reazione graduale, ed è perciò che ho ritenuto necessario ripetere quella parte sperimentale che non collima colle mie antiche esperienze, introducendo la modificazione della determinazione del *numero di saponificazione* all'analisi elementare dei prodotti dell'eterificazione ed al residuo inalterato dell'idrolisi parziale.

Benzoilazione della glicerina.

Gr. 9 glicerina Kahlbaum. dep. dist. 1,26 sciolti in 110 gr. di soluzione acquosa di NaOH, contenenti 10 gr. di idrato, si aggiunsero di cm^3 0,5 pari a gr. 0,6 di cloruro di benzoile provvisto dalla casa Erba e che distillava fra 194-195°. Si agitò fortemente la massa raffreddando con acqua. Si separano tosto dei fiocchi cristallini che, dopo tre ore, vennero estratti con benzolo.

Lo strato benzolico, separato dallo strato acquoso-glicerico alcalino, si lavò ripetutamente con acqua fino a reazione neutra, indi si filtrò su filtro di carta asciutto e si distillò il solvente. Il residuo, col raffreddamento, si rapprese in massa solida e venne disseccato in stufa ad acqua a pressione diminuita fino a costanza di peso, poi triturato finamente si lasciò soggiornare, rimanendo costante il peso, per qualche giorno in essiccatore ad acido solforico nel vuoto. Questo residuo pesa gr. 0,46 e fonde con riscaldamento rapido del bagno fra 71° e 72°. La determinazione del numero di saponificazione dette il seguente risultato:

Gr. 0,365 sostanza richiesero gr. 0,1514 di KOH.

N. di sapon. trovato 414,8	Calc. per	tribenzoina	416,7
	" "	dibenzoina	373,8
	" "	monobenzoina	286,1

Giova far notare che adoperando soluz. $\frac{N}{2}$ di KOH e HCl, l'errore di cm³. 0,05 nella lettura dei volumi delle soluzioni titolate basta far variare di 2,1 il numero di saponificazione per tale quantità di sostanza.

Lo strato acquoso-glicerico si addizionò di cm³. 1 di cloruro di benzoile agitando fortemente e raffreddando con acqua. Si ottenne una nuova quantità di precipitato fioccoso cristallino che estratto con benzolo e lavorato come il precedente pesava gr. 0,78. e fondeva fra 71° e 72°.

Gr. 0,6561 richiesero gr. 0,2717 KOH.

N. di sapon. 414,1 — tribenzoina 416,4.

Nelle seconde acque-alcaline-gliceriche si versò poco a poco cm³. 2 di cloruro di benzoile. Si raccolse gr. 1,53 di etere benzoilico, il cui punto fusione è situato fra 71-72°.

Gr. 0,8711 richiesero gr. 0,3619 KOH.

N. di saponif. 415,4 tribenzoina 416,4

Le terze acque-alcaline-gliceriche dettero coll'addizione di cm³. 5 di cloruro di benzoile gr. 2,5 di etere fus. 71-72°.

Gr. 0,7897 richiesero gr. 0,3299 KOH.

N. di saponif. 417,7 tribenzoina 416,4

Finalmente le ultime acque glicerico-alcaline vennero addizionate di un eccesso di liscivia di NaOH (100 cm³ di NaOH al 50 %) e si versò goccia a goccia, raffreddando ed agitando fortemente, cm³. 25,5 di cloruro di benzoile. Il residuo dell'estrazione col benzolo, disseccato nel vuoto a bagnomaria, pesa gr. 12 e fonde fra 70° e 72°. Nelle diverse fasi di benzoilazione si adoperò come somma la quantità di cloruro di benzoile e di glicerina corrispondenti ad 1 p. mol. dell'ultima per 3 p. mol. del primo.

Gr. 0,9584 richiesero gr. 0,3965 KOH.

N. di sapon. 413,7 cal. tribenzoina 416,4

Le diverse frazioni residue, esclusa la I^a, di cui non rimaneva più sostanza disponibile, si riunirono e vennero cristallizzate dal benzolo bollente. I primi cristalli depositatosi dettero alla determinazione del N. di saponificazione il seguente risultato.

Gr. 0,5566 richiesero gr. 0,2315 KOH.

N. di saponif. 415,9 calc. tribenzoina 416,4

Sulla seconda frazione di cristalli depositatosi per concentrazione a metà volume circa delle acque madri benzoliche non si fece la determinazione del N. di saponificazione. Le ultime acque madri benzoliche si eva-

porarono a costanza di peso, prima a bagno-maria ed infine nel vuoto sull'acido solforico. Devo avvertire che il benzolo, come anche l'alcool, si separa difficilmente dai cristalli di tribenzoina e che bisogna insistere più giorni di permanenza nel vuoto su acido solforico per ottenere l'eliminazione completa del solvente.

Gr. 0,6051 richiesero gr. 0,2509 KOH.

N. di saponif. 414,5 tribenzoina 416,4

Ho determinato con qualche cura il punto di fusione delle due frazioni, prima ed ultima riscaldando il bagno lentamente (1° in 10" a 12"). La I^a frazione riscaldata in tubicino di vetro a pareti sottili comincia a dare segno di rammollimento a 75°,5, ed è fusa completamente in liquido scolorito a 76°,5. La III^a frazione dà segno di rammollimento a 71°, ed è fusa completamente in liquido scolorito a 72°. Tutte e due le frazioni rimangono per molto tempo allo stato di surfusione alla temperatura ambiente. La I^a frazione dopo 36 ore accenna a cristallizzare alla superficie, mentre la III^a frazione rimane ancora limpida e solo dopo 48 ore accenna alla formazione di pochi germi cristallini. Ho lasciato le due sostanze alla temperatura ambiente per 8 giorni; trascorso il qual tempo esse erano completamente solidificate. Il punto di fusione determinato comparativamente collo stesso lento riscaldamento del bagno (1° in 10" a 12") dette per la I^a sostanza limpidezza perfetta a 74°, per la III^a a 72°. Il p. f. della I^a era disceso di 2°,5. Ho lasciato risolidificare le due sostanze, e dopo 15 giorni ho trovato che la I^a era fusa completamente a 74°, la III^a a 72°,5.

Saponificazione della tribenzoina.

Gr. 5,5 di tribenzoina (p. f. 75°,5-76°,5 N. di sap. 415,9) vennero fatti bollire a ricadere per 2 ore con 15 cm³. di soluzione acquosa al 10 % di NaOH. Dopo raffreddamento il liquido e la massa solidificata si agitò con due volumi di etere. Si separò la parte acquosa, e lo strato eterico si lavò con acqua fino a reazione neutra. L'etere filtrato lasciò alla distillazione un residuo che alla temperatura ambiente si rapprese in aghi raggiati che vennero disseccati nel vuoto sull'acido solforico fino a costanza di peso. Il residuo pesa gr. 3,6.

I° Gr. 0,8323 richiesero gr. 0,3466 KOH.

II° Gr. 1,181 " " 0,4894 "

	I	II	Calc. tribenzoina
N. di saponif.	416,3	414,4	416,4

Il punto di fusione delle due porzioni venne determinato comparativamente; il bagno si riscaldò lentamente 1° in 10"-12".

La tribenzoina primitiva fusa completamente 76°,5.

Il residuo della saponificazione fusa " 72°.

Le due sostanze si mantengono soprafuse in liquido scolorito: la tribenzoina dopo 24 ore è parzialmente solidificata, mentre il residuo è ancora completamente liquido. Dopo altre 24 ore la tribenzoina è rappresa in massa solida, mentre il residuo conserva ancora una parte liquida. Dopo altre 48 ore sono tutte e due solidificate ed i punti di fusione sono, 76°,5 fusione completa della massa per la tribenzoina — 74° fusione completa della massa pel residuo non saponificato.

Ciò dimostra che il punto di fusione della sostanza, che il *numero di saponificazione* mi caratterizza come tribenzoina, può anche variare in limiti ristretti di temperatura, come già venne verificato per molti altri gliceridi completi di acidi organici ed inorganici che presentano il così detto *doppio punto di fusione*, e di questo fatto importante Lipp e Miller non tennero il dovuto conto nelle deduzioni delle loro esperienze sulla tribenzoina.

Le esperienze descritte servono a confermare quanto scriveva nel 1902, cioè che *praticamente* l'eterificazione della glicerina col cloruro di benzoile non avviene per gradi, ma la prima goccia di cloruro di benzoile, che viene a contatto della soluzione alcalina di glicerina, dà subito la tribenzoina che venne in quest'ultima serie di esperienze controllata colla determinazione del *N. di saponificazione*.

La sensibilità di tale determinazione, adoperando come hanno fatto Lipp e Miller, soluz. $\frac{N}{2}$ di base e di acido e che io ho seguito, non permette di decidere la quistione se la tribenzoina sia o no accompagnata di piccole quantità di dibenzoina, perchè le variazioni di cm³. 0,05 di lettura nel volume delle soluzioni titolate fanno variare di unità 1,5 a 2 (adoperando gr. 0,5 a 1 gr. di sostanza) questa costante, e le determinazioni fatte oscillano nei limiti di tale errore.

La saponificazione parziale della tribenzoina colla soluzione acquosa al 10 % NaOH lascia un residuo inattaccato pel quale la determinazione del *N. di saponificazione* dà risultati concordanti con quello teorico della tribenzoina, almeno nei limiti dell'errore sperimentale.

Con ciò non si può escludere in modo assoluto che, tanto nella eterificazione quanto nella saponificazione, le due reazioni avvengano gradatamente, e che piccole cause come l'intensità di raffreddamento delle masse reagenti od il modo di agitare la mescolanza, possano far deviare le reazioni graduali concomitanti bimolecolari in senso quantitativo, e far apparire l'insieme dei processi praticamente come reazioni tetramolecolari. La determinazione quantitativa non serve a risolvere in modo esauriente il problema, ed anche la determinazione del punto di fusione non serve allo scopo, ma queste piccole differenze di condizioni sperimentali possono però servire a spiegare le piccole divergenze fra i risultati dei due chimici tedeschi ed i miei.

Geologia. — *Lembi fossiliferi quaternari e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal prof. D. Lovisato.* Nota del Corrispondente A. ISSEL.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'operatore differenziale binario S di M. Pieri.* Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

1. È noto ⁽¹⁾ che, essendo α una omografia vettoriale, ed u un vettore funzione del punto P, l'omografia

$$\frac{d(\alpha u)}{dP}$$

non si sa attualmente esprimere mediante gli operatori differenziali, *non binari*, finora introdotti (A. V. G., I, pp. 63-107) ⁽²⁾. È per tale ragione

⁽¹⁾ Ved. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*: I, *Transformations linéaires* (1912); II, *Applications à la mécanique et à la physique* (1913), Pavia, Mattei e C. In tutto il seguito, questi due volumi verranno, per brevità, indicati con A. V. G.

⁽²⁾ Anche del quadrato dell'operatore di Laplace per le omografie, cioè di $\Delta^2 \alpha$, è stata notata la mancanza (A. V. G., I, pag. 105); esso però risulta, in sostanza, contenuto nella [7] di pag. 104 (A. V. G., I). Sostituendo infatti in questa formula $\Delta \alpha$ ad α , si ha (A. V. G., pag. 104 [9], pag. 105 [19]):

$$\begin{aligned} \Delta^2 \alpha &= K \frac{d(\text{grad } \Delta K \alpha)}{dP} - \text{Rot}^2 \Delta \alpha = K \frac{d(\text{grad } \Delta K \alpha)}{dP} + \text{Rot}^4 \alpha \\ &= K \frac{d(\Delta' \text{grad } K \alpha)}{dP} - \text{Rot } \Delta \text{Rot } \alpha. \end{aligned}$$

Da questa si deduce facilmente, se α si riduce ad un numero m , la nota formula (A. V. G., I, pag. 105 [12]):

$$\Delta^2 m = \text{div } \Delta' \text{grad } m.$$

Invero, si ha (A. V. G., I, pag. 105 [11], pag. 102 [2]):

$$\begin{aligned} \text{Rot } m &= \text{grad } m \wedge, \quad \Delta \text{Rot } m = (\Delta' \text{grad } m) \wedge, \\ \text{Rot } \Delta \text{Rot } m &= -\text{div } \Delta' \text{grad } m + \frac{d(\Delta' \text{grad } m)}{dP}; \end{aligned}$$

e poichè è (A. V. G., I, pag. 105 [11], pag. 102 [1]):

$$\Delta' \text{grad } m = \text{grad } \Delta m = \text{grad } (\text{div grad } m),$$

la $\frac{d(\Delta' \text{grad } m)}{dP}$ è una dilatazione (A. V. G., I, pag. 77 [3]), e, in conseguenza, l'ultima forma scritta per $\Delta^2 \alpha$ dà subito l'espressione di $\Delta^2 m$.

che il compianto M. Pieri credè opportuno di introdurre l'operatore binario $S(\alpha, \mathbf{u})$, tale che:

$$(1) \quad \frac{d(\alpha \mathbf{u})}{dP} = \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} + S(\alpha, \mathbf{u}),$$

cioè definito dall'eguaglianza (per \mathbf{x} vettore arbitrario):

$$(2) \quad S(\alpha, \mathbf{u}) \mathbf{x} = \left(\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{x} \right) \mathbf{u},$$

e svilupparne le numerose e notevoli proprietà (*A. V. G.*, I, pp. 95-97; II, pag. 138).

Avendo io notato che fra queste formule manca quella che dà la coniugata di $S(\alpha, \mathbf{u})$, cioè la $KS(\alpha, \mathbf{u})$, in funzione di α (o di $K\alpha$), e di \mathbf{u} , mi son proposto di calcolarla: ma il calcolo svolto mi ha condotto appunto ad esprimere l'*operatore binario* $S(\alpha, \mathbf{u})$ mediante i già noti operatori differenziali *non binari*. Ciò non toglie, naturalmente, importanza all'operatore binario S , che, per le sue molteplici e semplici proprietà (fra queste, notevolissime: la seconda [7] a pag. 96 sull'espressione della derivata di un prodotto vettoriale, e la definizione di grad e Rot a pag. 150 di *A. V. G.*, I), deve essere ancora conservato; ma è pure importante il fatto che l'operatore S possa essere eliminato, poichè in molti casi i calcoli riescono più spediti.

Così, oltre ad esprimere con la (II), n. 3, la derivata di $\alpha \mathbf{u}$, indicata nella (1), senza l'operatore S , si è ottenuta l'espressione [(III), (IV), (V), nn. 4, 6, 8] della derivata sia del prodotto di quante si vogliano omografie, sia di una arbitraria potenza, intera e positiva, d'una omografia; considerando, in particolare, il caso in cui le date omografie sono delle derivate.

2. Sviluppo il calcolo tal quale come mi si è presentato.

Essendo \mathbf{a} , \mathbf{b} due vettori costanti, dalla definizione (2) di S si ha:

$$S(\alpha, \mathbf{u}) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{a} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{b},$$

e, per il teorema di cominutazione (*A. V. G.*, I, pag. 32; pag. 67 [4], pag. 69 [1'']):

$$\mathbf{a} \times KS(\alpha, \mathbf{u}) \mathbf{b} = \mathbf{u} \times \left(\frac{dK\alpha}{dP} \mathbf{a} \right) \mathbf{b} = \mathbf{u} \times \frac{d(K\alpha \mathbf{b})}{dP} \mathbf{a} = \mathbf{a} \times K \frac{d(K\alpha \mathbf{b})}{dP} \mathbf{u};$$

e, poichè \mathbf{a} è arbitrario:

$$KS(\alpha, \mathbf{u}) \mathbf{b} = K \frac{d(K\alpha \mathbf{b})}{dP} \mathbf{u}.$$

Ricordando che (*A. V. G.*, I, pag. 25; pag. 70 [1]):

$$K\beta = \beta - 2V\beta \wedge, \quad 2V \frac{dV}{dP} = \text{rot } V,$$

ne segue:

$$KS(\alpha, u) b = \frac{d(K\alpha b)}{dP} u - \text{rot}(K\alpha b) \wedge u,$$

ossia (*A. V. G.*, I, pag. 69 [1"], pag. 74 [4]):

$$KS(\alpha, u) b = \left(\frac{dK\alpha}{dP} u \right) b + u \wedge (\text{Rot } K\alpha) b;$$

e siccome questa vale per b arbitrario, si ha:

$$KS(\alpha, u) = \frac{dK\alpha}{dP} u + u \wedge \text{Rot } K\alpha,$$

da cui, operando con K nei due membri (*A. V. G.*, I, pag. 67 [4]):

$$(I) \quad S(\alpha, u) = \frac{d\alpha}{dP} u - K \text{Rot } K\alpha \cdot u \wedge.$$

OSSERVAZIONE. — Questa formula si può anche dedurre facilmente dalla [4] di pag. 74 (*A. V. G.*, I), cioè dalla:

$$K \text{Rot } K\alpha(u \wedge x) = \left(\frac{d\alpha}{dP} u \right) x - \left(\frac{d\alpha}{dP} x \right) u.$$

Basta osservare che il secondo termine del secondo membro di questa eguaglianza, per la (2), è $S(\alpha, u) x$, per ottenere subito la (I), poichè x è un vettore arbitrario.

3. La (I) permette ora di mettere subito la (1) sotto la forma:

$$(II) \quad \frac{d(\alpha u)}{dP} = \alpha \frac{du}{dP} + \frac{d\alpha}{dP} u - K \text{Rot } K\alpha \cdot u \wedge.$$

Questa ci mostra che, per il prodotto funzionale αu , non vale (in generale) la ordinaria regola di derivazione del prodotto di funzioni numeriche; poichè all'espressione che ne risulterebbe per la derivata del primo membro, eseguita applicando la legge indicata, occorre aggiungere un terzo termine, come è indicato nel secondo membro della (II).

Questo secondo membro si riduce, come è noto (*A. V. G.*, I, pag. 130), ai soli due primi termini quando α è una derivata (e solo allora); il che subito risulta anche dalla nostra (II). Invero, perchè si verifichi la condizione indicata, occorre e basta sia:

$$K \text{Rot } K\alpha \cdot u \wedge = 0;$$

e siccome \mathbf{u} è arbitrario, scegliendo opportunamente \mathbf{x} , il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ può identificarsi con qualsivoglia vettore dello spazio; perciò la condizione scritta equivale alla:

$$K \operatorname{Rot} K\alpha = 0, \quad \text{ossia: } \operatorname{Rot} K\alpha = 0,$$

la quale è appunto (*A. V. G.*, I, pag. 118) la condizione necessaria e sufficiente perchè α sia una derivata.

DERIVATA DEL PRODOTTO DI DUE O PIÙ OMOGRAFIE.

4. Se nella (II) si pone $\mathbf{u} = \beta \mathbf{a}$, essendo β una seconda omografia ed \mathbf{a} un vettore costante, si ha:

$$(3) \quad \frac{d(\alpha\beta\mathbf{a})}{dP} = \alpha \frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP} + \frac{d\alpha}{dP} \beta\mathbf{a} - K \operatorname{Rot} K\alpha \cdot (\beta\mathbf{a}) \wedge.$$

Se introduciamo ora, con il Burali-Forti ⁽¹⁾, l'operatore \mathbf{A} (*assiale*), simbolo iperomografico il cui campo d'applicazione è formato dai vettori, se cioè poniamo:

$$(4) \quad \mathbf{a} \wedge = \mathbf{A}\mathbf{a}, \quad (\beta\mathbf{a}) \wedge = \mathbf{A}(\beta\mathbf{a}) = \mathbf{A}\beta\mathbf{a},$$

[essendo priva di significato l'espressione $(\mathbf{A}\beta)\mathbf{a}$], applicando la (II), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha\beta\mathbf{a})}{dP} &= \frac{d(\alpha\beta)}{dP} \mathbf{a} - K \operatorname{Rot} K(\alpha\beta) \cdot \mathbf{a} \wedge = \frac{d(\alpha\beta)}{dP} \mathbf{a} - K \operatorname{Rot} K(\alpha\beta) \cdot \mathbf{A}\mathbf{a}, \\ \alpha \frac{d\beta\mathbf{a}}{dP} &= \alpha \left[\frac{d\beta}{dP} \mathbf{a} - K \operatorname{Rot} K\beta \cdot \mathbf{a} \wedge \right] = \alpha \frac{d\beta}{dP} \mathbf{a} - \alpha K \operatorname{Rot} K\beta \cdot \mathbf{A}\mathbf{a}; \end{aligned}$$

ed allora dalle (3) e (4) segue subito:

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad \frac{d(\alpha\beta)}{dP} &= \alpha \frac{d\beta}{dP} + \frac{d\alpha}{dP} \beta + K \operatorname{Rot} K(\alpha\beta) \cdot \mathbf{A} - \\ &\quad - \alpha \cdot K \operatorname{Rot} K\beta \cdot \mathbf{A} - K \operatorname{Rot} K\alpha \cdot \mathbf{A}\beta \quad (*). \end{aligned}$$

Se α e β sono derivate, cioè (cfr. n. 3) $\operatorname{Rot} K\alpha = 0$, $\operatorname{Rot} K\beta = 0$, si ha:

$$\text{(III')} \quad \frac{d(\alpha\beta)}{dP} = \alpha \frac{d\beta}{dP} + \frac{d\alpha}{dP} \beta + K \operatorname{Rot} K(\alpha\beta) \cdot \mathbf{A};$$

⁽¹⁾ C. Burali-Forti. *Sopra alcuni operatori lineari vettoriali*, Atti del R. Istituto Veneto, tom. LXXII, parte seconda, 1912-1913, pp. 265-276.

^(*) In certi casi, per il prodotto funzionale può essere necessario — a scanso di dannose ambiguità — il segno \mathbf{O} . Cfr., per questo, C. Burali-Forti, *Sopra alcuni operatori ecc.*, cit.

e se anche il prodotto $\alpha\beta$ è una derivata, si ottiene:

$$(III'') \quad \frac{d(\alpha\beta)}{dP} = \alpha \frac{d\beta}{dP} + \frac{d\alpha}{dP} \beta;$$

la quale formula, supposto che α, β siano delle derivate, vale quando, e soltanto quando [come mostra la (III')], anche $\alpha\beta$ è una derivata.

Sarebbe quindi interessante di vedere la condizione a cui debbono soddisfare le omografie α, β perchè, essendo esse derivate, sia pure $\alpha\beta$ una derivata.

5. Una delle forme sotto la quale può esprimersi detta condizione è la seguente:

In virtù di una formula ottenuta dal Pensa ⁽¹⁾, cioè dalla:

$$2V \left(\alpha K \frac{d\beta a}{dP} \right) = [\text{Rot}(\alpha\beta) - \text{Rot } \alpha \cdot \beta - CK\alpha \cdot \text{Rot } \beta] a,$$

la quale può sciversi:

$$2V \left(K\beta K \frac{dK\alpha a}{dP} \right) = \text{Rot } K(\alpha\beta) - \text{Rot } K\beta \cdot K\alpha - C\beta \cdot \text{Rot } K\alpha] a,$$

ove a è un vettore costante, perchè si abbia: $\text{Rot } K(\alpha\beta) = \text{Rot}(K\beta K\alpha) = 0$, quando si supponga essere $\text{Rot } K\alpha = 0$, $\text{Rot } K\beta = 0$, occorre e basta risulti:

$$V \left(K\beta K \frac{dK\alpha a}{dP} \right) = 0,$$

od anche:

$$V \left(\frac{dK\alpha a}{dP} \beta \right) = 0,$$

qualunque sia il vettore costante a .

In altri termini: Se α e β sono derivate, il prodotto $\alpha\beta$ risulterà pure una derivata quando e solo quando l'omografia:

$$K\beta K \frac{dK\alpha a}{dP}, \text{ ovvero la: } \frac{dK\alpha a}{dP} \beta,$$

sia una dilatazione, qualunque sia il vettore costante a .

6. La (III) può estendersi facilmente al prodotto di un numero qualunque di omografie; e si ha che:

⁽¹⁾ A. Pensa, *Sopra alcuni operatori differenziali omografici*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, tomo XLVIII, 1912-13, pp. 149-155; pag. 150 (6).

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono delle omografie funzioni del punto P, vale la relazione:

$$(IV) \quad \frac{d(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)}{dP} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \frac{d\alpha_n}{dP} + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \frac{d\alpha_{n-1}}{dP} \alpha_n + \dots \\ + \frac{d\alpha_1}{dP} \alpha_2 \dots \alpha_n + K \operatorname{Rot} K(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \cdot A - \\ - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \cdot K \operatorname{Rot} K \alpha_n \cdot A - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \cdot K \operatorname{Rot} K \alpha_{n-1} \cdot A \alpha_n - \\ - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-3} K \operatorname{Rot} K \alpha_{n-2} \cdot A \alpha_{n-1} \alpha_n - \dots - K \operatorname{Rot} K \alpha_1 \cdot A \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Questa formula si dimostra senza difficoltà per induzione. Supposto infatti sia vera per un certo valore intero e positivo m , di n , sostituiamo in essa, ad α_m (per $n = m$), il prodotto $\alpha_m \alpha_{m+1}$; applicando la (III), si ottiene:

$$\frac{d(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \alpha_{m+1})}{dP} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \left[\alpha_m \frac{d\alpha_{m+1}}{dP} + \frac{d\alpha_m}{dP} \alpha_{m+1} + \right. \\ \left. + K \operatorname{Rot} K(\alpha_m \alpha_{m+1}) \cdot A - \alpha_m K \operatorname{Rot} K \alpha_{m+1} \cdot A - K \operatorname{Rot} K \alpha_m \cdot A \alpha_{m+1} \right] + \\ + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-2} \frac{d\alpha_{m-1}}{dP} \alpha_m \alpha_{m+1} + \dots + \frac{d\alpha_1}{dP} \alpha_2 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} + \\ + K \operatorname{Rot} K(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m+1}) \cdot A - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} K \operatorname{Rot} K(\alpha_m \alpha_{m+1}) \cdot A - \\ - \alpha_1 \dots \alpha_{m-2} K \operatorname{Rot} K \alpha_{m-1} \cdot A \alpha_m \alpha_{m+1} - \dots - K \operatorname{Rot} K \alpha_1 \cdot A \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{m+1},$$

nella quale si elidono i termini in $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} K \operatorname{Rot} K(\alpha_m \alpha_{m+1}) \cdot A$; dopo ciò, risulta provato che la (IV) vale pure per $n = m + 1$. E siccome essa coincide con la (III) per $n = 2$, si conclude che essa vale per ogni valore intero e positivo di n , cioè è vera in ogni caso.

7. Come nel n. 4, possiamo osservare che, se le omografie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono delle derivate, allora: quando, e solo quando, è pure una derivata il loro prodotto $\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n$, si ha:

$$(IV') \quad \frac{d(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)}{dP} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \frac{d\alpha_n}{dP} + \dots + \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dP} \alpha_3 \dots \alpha_n + \\ + \frac{d\alpha_1}{dP} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n;$$

e mi sembra degno di nota il fatto che, fra le condizioni ora indicate come sufficienti perchè valga la (IV'), non compaiono affatto i prodotti formati con una parte soltanto delle n omografie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Similmente a quanto si è fatto nel n. 5, dalla formula (2) del Pensa (loc. cit., pag. 150):

$$2V\left(\alpha \frac{d\beta a}{dP}\right) = [\operatorname{Rot}(\alpha\beta) - \operatorname{Rot} \alpha \cdot \beta] a,$$

per \mathbf{a} vettore costante, si deduce:

$$2\dot{V} \left[K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}) \mathbf{a}}{dP} \right] = \\ = [\text{Rot } K(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) - \text{Rot } K\alpha_n \cdot K(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)] \mathbf{a};$$

quindi, essendo $\text{Rot } K\alpha_n = 0$, affinchè risulti pure $\text{Rot } K(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = 0$, occorre e basta che l'omografia $K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}) \mathbf{a}}{dP}$ sia una dilatazione, qualunque sia il vettore costante \mathbf{a} .

Dunque: se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono delle derivate, la (IV') sussiste quando e solo quando l'omografia:

$$K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}) \mathbf{a}}{dP},$$

per \mathbf{a} vettore costante arbitrario, è una dilatazione.

8. Dalla (IV), in particolare, si ricava quale espressione della derivata di una qualsivoglia potenza intera e positiva n -esima d'una omografia:

$$(V) \quad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1} \frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2} \frac{d\alpha}{dP} \alpha + \dots + \alpha \frac{d\alpha}{dP} \alpha^{n-2} + \frac{d\alpha}{dP} \alpha^{n-1} + \\ + K \text{ Rot } K\alpha^n \cdot \mathbf{A} - \alpha^{n-1} K \text{ Rot } K\alpha \cdot \mathbf{A} - \\ - \alpha^{n-2} K \text{ Rot } K\alpha \cdot \mathbf{A}\alpha - \dots - K \text{ Rot } K\alpha \cdot \mathbf{A}\alpha^{n-1};$$

la quale, quando α è una derivata, si riduce a:

$$(V') \quad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1} \frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2} \frac{d\alpha}{dP} \alpha + \dots + \alpha \frac{d\alpha}{dP} \alpha^{n-2} + \\ + \frac{d\alpha}{dP} \alpha^{n-1} + K \text{ Rot } K\alpha^n \cdot \mathbf{A};$$

e, se anche α^n è una derivata, si ha:

$$(V'') \quad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1} \frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2} \frac{d\alpha}{dP} \alpha + \dots + \alpha \frac{d\alpha}{dP} \alpha^{n-2} + \frac{d\alpha}{dP} \alpha^{n-1}.$$

Per quanto si è detto nel n. 7, se α è una derivata la (V'') sussiste quando e solo quando $K\alpha \frac{dK\alpha^{n-1} \mathbf{a}}{dP}$ è una dilatazione, qualunque sia il vettore costante \mathbf{a} .

Geometria. — *Sopra una questione di geometria cinematica.*

Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Una curva C_1 si dice *trasformata asintotica* di un'altra curva C , quando quella e questa sono asintotiche curvilinee di una medesima superficie rigata. Nella trasformazione si fa corrispondere ad ogni punto M di C il punto M_1 di C_1 che si trova sulla generatrice passante per M ⁽¹⁾.

Il problema della costruzione di tutte le trasformate asintotiche C_1 di una curva C si risolve con quadrature. Vi si giunge per parecchie vie, e in una Memoria in corso di stampa ⁽²⁾, ho seguito quella che qui riassumo: Designamo con x, y, z le coordinate del punto M di C , in funzione dell'arco v della curva, con

$$\alpha, \beta, \gamma \quad ; \quad \xi, \eta, \zeta \quad ; \quad \lambda, \mu, \nu,$$

i coseni direttori, rispettivamente, della tangente, della normale principale, della binormale, con $\frac{1}{\rho}$ e $\frac{1}{T}$ la flessione e la torsione della curva e con le medesime lettere, munite dell'indice 1, gli elementi corrispondenti per la curva trasformata C_1 . Indichiamo con $\theta(v)$ la funzione dell'arco v di C che misura l'angolo di inclinazione del raggio MM_1 sulla tangente alla C in M , con $t(v)$ la lunghezza del tratto MM_1 , con $\sigma(v)$ l'angolo (fra 0 e π) delle binormali in M e in M_1 alle due curve C e C_1 . Si ha il teorema (cfr. la mia citata Memoria):

Se θ, t, σ sono tali funzioni dell'arco v di C da soddisfare alle equazioni:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{\rho} = \left(\frac{T}{t} + \cot \sigma \right) \frac{\cos \theta}{T}, \\ \frac{d \cot \sigma}{dv} + \frac{T}{t} \frac{d \log t}{dv} = \left(\frac{1}{\sin^2 \sigma} - \frac{T^2}{t^2} \right) \frac{\cos \theta}{T}, \end{array} \right.$$

le formole

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x + t(\alpha \cos \theta + \xi \sin \theta), \\ y_1 = y + t(\beta \cos \theta + \eta \sin \theta), \\ z_1 = z + t(\gamma \cos \theta + \zeta \sin \theta), \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Bianchi, *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXV, 1° sem., 1908.

⁽²⁾ Picone, *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria: Sulle congruenze rettilinee W* [in corso di stampa nei Rendic. del Circolo Matematico di Palermo].

rappresentano le coordinate del punto M_1 , corrispondente al punto M di C , nella più generale trasformazione asintotica di C .

Di questo teorema ho fatto diverse applicazioni nella Memoria citata; in questa breve Nota mi permetto di mostrare come esso fornisca la completa risoluzione della seguente questione di *geometria cinematica*:

Determinare tutti i movimenti di una retta in cui la traiettoria di ogni punto è un'asintotica sulla rigata generata dalla retta.

La questione può trattarsi per altre vie, specialmente quando si pensi ch'essa può anche così formularsi:

Costruire tutte le superficie rigate (le diremo rigate R) sulle quali le punteggiate proiettive, secondo cui le asintotiche curvilinee segano le generatrici, risultano identiche.

La trattazione che vado ad esporre ha il merito di una grandissima semplicità nei calcoli.

2. Alla classe delle rigate R , le cui asintotiche segano le generatrici in punteggiate identiche, appartiene l'*elicoide rigata d'area minima*. Vedremo che l'*elicoide rigata d'area minima* fornisce un esempio particolarissimo di tali rigate, nonostante possiamo fin da ora rilevare una proprietà comune a tutte, è la seguente:

Le rigate R sono a piano direttore.

Ed infatti la linea nel piano all'infinito di ogni rigata R deve risultare un'asintotica, e perciò sarà una retta.

3. Per la trattazione analitica del nostro problema, domandiamoci, come prima cosa, se esistono trasformazioni asintotiche per una curva C nelle quali il tratto $MM_1 = t(v)$, congiungente due punti corrispondenti, ha lunghezza costante $= u$. Ponendo $t = u$ nelle (1), si vede che θ e σ devono soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{\rho} = \left(\frac{T}{u} + \cot \sigma \right) \frac{\sin \theta}{T}, \\ \frac{d \cot \sigma}{dv} = \left(\frac{1}{\sin^2 \sigma} - \frac{T^2}{u^2} \right) \frac{\cos \theta}{T}. \end{cases}$$

Ne segue che: *Per ogni curva C esistono ∞^3 sue trasformate asintotiche tali che la distanza fra due punti corrispondenti è costante; ciascuna trasformata risulta individuata coll'assegnarle, sopra un determinato piano, osculante in M la C , un punto M_1 per cui deve passare, e un piano per MM_1 dal quale deve essere osculata.*

Se consideriamo ora una rigata R , le sue asintotiche sono trasformate asintotiche di una fissata C fra esse, tali che la distanza fra due punti corrispondenti è costante. Designamo con C_u l'asintotica di R che stacca sulle generatrici, a partire dai punti di C , un segmento di lunghezza u . Le funzioni θ e σ relative alla coppia C e C_u di trasformate asintotiche devono

soddisfare al sistema (3), ne segue l'esistenza di due soluzioni θ e σ del detto sistema *di cui la prima non dipende da u* . Se pertanto con $\tau(v)$ indichiamo una funzione della sola v , dovremo avere

$$(4) \quad \frac{T}{u} + \cot \sigma = \tau(v),$$

e quindi, se si tien conto della seconda delle (3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cot \sigma}{\partial u} &= \frac{T}{u^2}, \\ \frac{\partial \cot \sigma}{\partial v} &= \left(1 + \cot^2 \sigma - \frac{T^2}{u^2}\right) \frac{\cos \theta}{T}. \end{aligned}$$

Eguagliando le due espressioni che queste equazioni forniscono per $\frac{\partial^2 \cot \sigma}{\partial u \partial v}$, si ottiene

$$(5) \quad \frac{dT}{dv} = 2\tau \cos \theta.$$

Se infine scriviamo che il valore di $\cot \sigma$ fornito dalla (4) soddisfa alla seconda equazione delle (3), si ricava, tenendo conto della (5),

$$\frac{d\tau}{dv} = (1 + \tau^2) \frac{\cos \theta}{T}.$$

Troviamo dunque che la torsione e la flessione della C devono essere tali funzioni dell'arco v , che esistano *due* funzioni τ e θ di v verificanti le *tre* equazioni:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= 2\tau \cos \theta, & 1^a \\ \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{\rho} &= \tau \frac{\sin \theta}{T}, & 2^a \\ \frac{d\tau}{dv} &= (1 + \tau^2) \frac{\cos \theta}{T}. & 3^a \end{aligned} \right.$$

E viceversa, riesce evidente che se una curva C possiede l'indicata particolarità, la rigata che si ottiene conducendo per ogni punto di C e nel relativo piano osculatore un raggio inclinato sulla tangente di un angolo misurato dalla funzione $\theta(v)$, soddisfacente, colla $\tau(v)$, alle (5), è la più generale rigata R .

Per la costruzione delle curve C , asintotiche di una rigata R , procediamo al modo seguente. Osserviamo che dalla 1^a e dalla 3^a delle (5) si ricava

$$\frac{2\tau}{1 + \tau^2} \frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dv},$$

e quindi, designando con a una costante arbitraria,

$$(6) \quad T = a(1 + \tau^2).$$

Ad una curva C si può dunque asseguare ad arbitrio la flessione $\frac{1}{\varrho}$ in funzione dell'arco v ; la torsione sarà poi fornita dalla (6), dove $\tau(v)$ si ricava dall'integrazione del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle due funzioni incognite θ e τ :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos \theta}{a}, \\ \frac{d\theta}{dv} = -\frac{1}{\varrho} + \frac{\tau \sin \theta}{a(1 + \tau^2)}. \end{array} \right.$$

Meglio conviene però enunciare il risultato a cui siamo giunti nella forma seguente:

La torsione e la flessione, in funzione dell'arco v , di un'asintotica C per la più generale rigata R , sono definiti dalle seguenti eguaglianze:

$$(8) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{a(1 + \tau^2)}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\tau \sin \theta}{a(1 + \tau^2)} - \frac{d\theta}{dv},$$

dove θ è una funzione di v assegnata arbitrariamente, esprimente l'angolo secondo cui la C taglia le generatrici della rigata R , a è una costante arbitraria, e τ si ricava con una quadratura dall'equazione

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos \theta}{a}.$$

Costruita la curva C , siano $x = \bar{x}(v)$, $y = \bar{y}(v)$, $z = \bar{z}(v)$ le sue equazioni, le equazioni della rigata R che possiede questa curva fra le sue asintotiche, sono

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{x}(v) + u(\alpha \cos \theta + \xi \sin \theta), \\ y = \bar{y}(v) + u(\beta \cos \theta + \eta \sin \theta), \\ z = \bar{z}(v) + u(\gamma \cos \theta + \zeta \sin \theta), \end{array} \right.$$

ove u e v designano i parametri delle asintotiche.

Già sappiamo che ogni rigata R è a piano direttore. Lo possiamo verificare analiticamente, calcolando il wronskiano delle tre funzioni di v :

$$\alpha \cos \theta + \xi \sin \theta, \quad \beta \cos \theta + \eta \sin \theta, \quad \gamma \cos \theta + \zeta \sin \theta,$$

si trova, con un facile calcolo, tenendo presente le equazioni (5), ch'esso è

identicamente nullo. Segue l'esistenza di tre determinati e costanti coseni direttori l, m, n pei quali è identicamente

$$(10) \quad l(\alpha \cos \theta + \xi \sin \theta) + m(\beta \cos \theta + \eta \sin \theta) + n(\gamma \cos \theta + \zeta \sin \theta) = 0.$$

Per individuare la giacitura del piano direttore della rigata R , calcoliamo i coseni direttori della direzione fissa (l, m, n) rispetto al triedro mobile determinato dalla tangente, dalla normale principale e dalla binormale alla C . A tale scopo disponiamo la rigata R in modo che il suo piano direttore sia il piano (x, y) , la (10) ci darà

$$(11) \quad \cot \theta = -\frac{\zeta}{\gamma}.$$

mentre γ, ζ, v rappresenteranno i coseni direttori ultimamente menzionati. Dalla (11), se si tien conto della seconda delle (5), si trae

$$-\frac{r\gamma}{\gamma^2 + \zeta^2} = \tau \sin \theta,$$

e quindi, poichè $\zeta = -\gamma \cot \theta$,

$$v = -\frac{\tau\gamma}{\sin \theta}.$$

ne segue

$$\gamma = \varepsilon \frac{\sin \theta}{1 + \tau^2}, \quad \zeta = -\varepsilon \frac{\cos \theta}{1 + \tau^2}, \quad v = -\varepsilon \frac{\tau}{1 + \tau^2},$$

ove $\varepsilon = \pm 1$. Si ha pertanto che i coseni direttori l, m, n della direzione fissa, alla quale le generatrici della rigata R si mantengono normali, sono

$$(12) \quad \begin{cases} l = \frac{\varepsilon}{1 + \tau^2} (\alpha \sin \theta - \xi \cos \theta - \lambda \tau), \\ m = \frac{\varepsilon}{1 + \tau^2} (\beta \sin \theta - \eta \cos \theta - \mu \tau), \\ n = \frac{\varepsilon}{1 + \tau^2} (\gamma \sin \theta - \zeta \cos \theta - v \tau). \end{cases}$$

Si verifica subito, tenendo conto delle (5), che l, m, n sono costanti.

I risultati della precedente breve ricerca conducono dunque al seguente teorema di geometria cinematica:

Si costruisca una curva C per la quale la torsione e la flessione, in funzione dell'arco v , siano date dalle eguaglianze:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{a(1 + \tau^2)}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\tau \sin \theta}{a(1 + \tau^2)} - \frac{d\theta}{dv},$$

dove θ è una funzione arbitraria di v , a è una costante arbitraria e τ si ricava dall'equazione

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos \theta}{a};$$

i coseni direttori l, m, n forniti dalle (12) risulteranno costanti. Si im-
prima ora ad un piano π un movimento traslatorio nel quale man-
tenga la giacitura normale alla direzione l, m, n , ed un suo punto M
descriva la curva C ; la retta comune al piano π e al piano osculatore
in M alla C si muoverà secondo il più generale movimento in cui ogni
punto descrive un'asintotica della rigata generata dalla retta.

4. Notevolmente semplice è la generazione del movimento della retta,
quando ad un suo punto M si assegni una traiettoria rettilinea. Bisognerà
allora integrare il seguente sistema di equazioni

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos \theta}{a}, \\ \frac{d\theta}{dv} = \frac{\tau \sin \theta}{a(1 + \tau^2)}, \end{cases}$$

che si deduce dal sistema (7), per $\frac{1}{\varrho} = 0$. Segue dalle (7'):

$$\frac{1}{\tan \theta} \frac{d\theta}{dv} = \frac{\tau}{1 + \tau^2} \frac{d\tau}{dv},$$

e quindi, se b designa una seconda costante arbitraria,

$$\sin \theta = \sin b \cdot \sqrt{1 + \tau^2}.$$

Dalla prima delle (7') seguirà

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\varepsilon}{a} \sqrt{\cos^2 b - \tau^2 \sin^2 b} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'onde

$$\tau = \cot b \cdot \sin \left\{ \varepsilon \frac{\sin b}{a} (v - c) \right\}.$$

Possiamo supporre $c = 0$, e indicare con k la costante $\varepsilon \frac{\sin b}{a}$, si avrà

$$\tau = \cot b \cdot \sin kv,$$

$$\sin \theta = \sin b \cdot \sqrt{1 + \cot^2 b \sin^2 kv}, \quad \cos \theta = \varepsilon \cos b \cos kv.$$

$$T = \varepsilon \frac{\sin b}{k} (1 + \cot^2 b \sin^2 kv).$$

Se ora supponiamo che la traiettoria rettilinea C del punto M sia l'asse delle z , bisognerà porre nelle (9), $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = v$ e quindi $\alpha = \beta = \zeta = v = 0$, $\gamma = 1$. Si hanno subito le espressioni di $\xi, \eta; \lambda, \mu$ e le equazioni della rigata R generata dalla retta mobile risulteranno

$$x = u \sin b \cos kv,$$

$$y = -u \sin kv,$$

$$z = v \pm u \cos b \cos kv.$$

La giacitura del piano direttore della R è normale alla direzione $\cos b$, o, $\mp \sin b$.

Concludiamo pertanto che:

Il più generale movimento di una retta m nel quale ogni punto descrive un'asintotica della rigata descritta dalla retta, colla condizione che la traiettoria di un suo punto M sia una retta assegnata r si genera al modo seguente: Si consideri un piano per la retta mobile m , e ad esso si imprima un movimento traslatorio rettilineo, nella direzione della r , seco trascinando la retta m che contemporaneamente si muove nel piano di moto rotatorio attorno al punto M con una velocità in rapporto costante rispetto a quella di M .

Meccanica. — *Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica.* Nota II di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Mantenendo le denominazioni adottate nella Nota I, poniamo

$$\sigma = \int_t^{t+\tau} \mathfrak{S} dt$$

$$\mathfrak{A} = \int_t^{t+\tau} \mathfrak{S} dt.$$

cioè rappresentiamo con σ il valore dell'arco di traiettoria percorso da S nell'intervallo $(t, t + \tau)$ e con \mathfrak{A} il valore dell'azione delle forze attive su S relativo allo stesso intervallo. Dal risultato ottenuto in fine alla Nota I, segue, in particolare, che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema delle forze attive su S si riduca (a meno di un sistema di forze perpendicolare alla velocità) ad un sistema di forze derivante da una resi-

stenza di mezzo per la quale (indicando con h, k, l delle costanti positive arbitrarie) la funzione caratteristica abbia la forma

$$f(\mathfrak{S}) = \begin{cases} h & (\text{resistenza viscosa}) \\ k\sqrt{\mathfrak{S}} & (\text{resistenza idraulica}) \\ l\mathfrak{S} & \end{cases}$$

è che $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di $\begin{cases} \tau \\ \sigma \end{cases}$ solamente, positiva per $\begin{cases} \tau \\ \sigma \end{cases} > 0$.

Dal risultato medesimo segue che tutte le volte che il sistema di forze attive su S si riduca (sempre a meno di un sistema di forze perpendicolari all'atto di movimento) ad un sistema di forze derivante da una resistenza di mezzo di funzione caratteristica

$$f(\mathfrak{S}) = h + k\sqrt{\mathfrak{S}}$$

(cioè composta di una resistenza viscosa e di una resistenza idraulica). $P_{t,\tau}$ risulterà una funzione di τ e σ soltanto, positiva per τ e σ positivi. La proprietà inversa è pure vera, e si dimostra senza difficoltà osservando che, dall'essere

$$P_{t,\tau} = \varphi(\tau, \sigma),$$

segue

$$-\frac{1}{\mathfrak{S}_t} \frac{d\mathfrak{S}_{t+\tau}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \sqrt{\mathfrak{S}_{t+\tau}},$$

ed anche — indicati con h e k i valori positivi ⁽¹⁾ di $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0}$ e

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \log \mathfrak{S} = -(h + k\sqrt{\mathfrak{S}}),$$

⁽¹⁾ Che $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0}$ e $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right)_{\tau=\sigma=0}$ sono necessariamente positivi, è immediata conseguenza

1°) della disequaglianza

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right)_{\tau=\sigma=0} \sqrt{\mathfrak{S}} \leq 0$$

che, indipendentemente dal valore di \mathfrak{S} , deve essere verificata perchè si suppone $\varphi(\tau, \sigma)$ positiva per τ e σ positivi, mentre è

$$\varphi(0, 0) = P_{t,0} = 0;$$

2°) della (1) che fa escludere che anche uno solo dei valori in questione possa essere nullo.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right)_{\tau=\sigma=0} - :$$

e infine

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{-\int_t^{t+\tau} (h+k\sqrt{g}) dt}$$

2. Sia P un punto materiale libero. \mathbf{v} la sua velocità, \mathbf{F}_T ed \mathbf{F}_N i componenti tangenziale e normale della forza totale agente sopra di esso, δ la distanza delle sue posizioni all'inizio e al termine dell'intervallo di tempo qualunque $(t, t + \tau)$.

Avendo presenti le conclusioni della Nota I e più specialmente le loro conseguenze poste in evidenza al § 1, può sembrare anche superfluo di rilevare esplicitamente che, come abbiamo enunciato fin dal principio della Nota I, allora, e allora solamente, che sia

$$\mathbf{F}_T = -h\mathbf{v} \quad (\text{resistenza viscosa})$$

ovvero

$$\mathbf{F}_T = -k v \mathbf{v} \quad (\text{resistenza idraulica}),$$

$P_{t,\tau}$ sarà una funzione di τ soltanto, ovvero di σ soltanto, positiva pei valori positivi del suo argomento.

Nel secondo caso, quando ulteriormente \mathbf{F}_N sia tale ⁽¹⁾ che la traiettoria

⁽¹⁾ È opportuno di rilevare, specialmente a giustificazione di quanto è asserito nella nota (6), che condizione necessaria e sufficiente affinché la traiettoria di P sia un'elica circolare (in particolare un cerchio o una retta) è che sia

$$(\alpha) \quad \mathbf{F}_N = v \mathbf{v} \wedge \mathbf{H},$$

\mathbf{H} essendo un vettore costante non nullo parallelo all'asse del cilindro sede dell'elica.

La proprietà diretta risulta immediatamente dall'espressione generale di \mathbf{F}_N in funzione di v e del raggio di curvatura della traiettoria. Per dimostrare poi la proprietà inversa, basterà che prendiamo in esame i moti delle proiezioni P_1, P_2 di P sopra un piano perpendicolare ad \mathbf{H} e sopra una retta parallela ad \mathbf{H} . Indicando con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ le velocità di P_1, P_2 , se vale la (α) , evidentemente sarà

$$(\beta) \quad \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_T}{v} \mathbf{v}_1 + v \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{H}$$

$$(\gamma) \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_T}{v} \mathbf{v}_2,$$

donde si deduce [moltiplicando scalarmente (β) e (γ) per \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2]

$$\frac{d}{dt} \log v_1^2 = \frac{\mathbf{F}_T}{v} = \frac{d}{dt} \log v_2^2.$$

Ne segue

$$\frac{v_2}{v_1} = \text{cost.},$$

ed anche

$$\frac{v_2}{v} = \text{cost.}$$

Ciò prova che \mathbf{v} forma un angolo costante con \mathbf{H} , e al tempo stesso (sempre in base

di P risulti un'elica circolare (in particolare una circonferenza o una retta), $P_{t,\tau}$ si potrà considerare anche come una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$.

Invero le eliche circolari godono la proprietà, sufficiente ad individuarle, che in esse, ad archi di lunghezza eguale, corrispondono corde eguali ⁽²⁾.

Si può domandare se non si presenti anche in altri casi la circostanza che $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$:

$$(2) \quad P_{t,\tau} = \psi(\delta).$$

Alla conclusione che ciò non si verifica, facilmente si perviene nel modo seguente.

Derivando la (2) rispetto a τ , poichè δ è funzione di τ soltanto per il tramite di σ , si ottiene, qualunque sia τ ,

$$-\frac{1}{\mathfrak{S}_t} \frac{d\mathfrak{S}_{t+\tau}}{d\tau} = \psi'(\delta) \frac{d\delta}{d\sigma} \sqrt{\mathfrak{S}_{t+\tau}},$$

ed anche, per $\tau = 0$,

$$(3) \quad \frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau} = -\psi'(0) \sqrt{\mathfrak{S}},$$

perchè, evidentemente,

$$\left(\frac{d\delta}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = 1.$$

Indicando con k il valore positivo ⁽³⁾ di $\psi'(0)$ dalla (3) si deduce

$$(4) \quad P_{t,\tau} = 1 - e^{-k\sigma},$$

all'espressione generale della componente normale della forza applicata ad un punto materiale in funzione della velocità e del raggio di curvatura della traiettoria) permette di dedurre dalla (β) che la flessione della traiettoria di P_1 (se non è identicamente $v_1 = 0$) è costante e $\neq 0$, così che la traiettoria stessa è una circonferenza (eventualmente degenerare in un punto). La traiettoria di P sarà dunque un'elica di un cilindro circolare retto, avente l'asse parallelo al vettore H.

⁽¹⁾ Le eliche circolari sono caratterizzate (cfr. ad es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, 1902) dall'essere in ogni parte sovrapponibili a sè stesse. In una elica cilindrica a due archi di eguale lunghezza, corrisponderanno dunque corde eguali. Viceversa, se in una curva si verifica questa proprietà, qualunque sia la lunghezza comune dei due archi considerati, risulterà possibile, fissati ad arbitrio due punti P' , P'' della curva, stabilire una corrispondenza della curva in sè, in cui i punti P' , P'' siano omologhi e che conservi le lunghezze degli archi e, al tempo stesso, le distanze. Vuol dire che in tale ipotesi la curva sarà necessariamente sovrapponibile a sè stessa in ogni sua parte, e quindi sarà un'elica circolare, c. d. d.

⁽²⁾ Cfr. la (3) della Nota I.

ciò che prova che, se vale la (2), il moto di P è dovuto all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica. Di più, confrontando la (4) colla (2) [quando si tenga presente che è $\psi'(0) \neq 0$ | si arriva (senza escludere che la ψ possa essere una funzione multiforme di δ) ⁽¹⁾ alla conclusione che, sempre valendo la (2), nella traiettoria di P, a due archi di lunghezza eguale (almeno se tale comune lunghezza non è troppo grande), corrispondono corde eguali. Ciò basta (evidentemente) per potere asserire che la traiettoria di P è un'elica cilindrica.

Possiamo dunque concludere che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ solamente, positiva per $\delta > 0$, caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità, quelli che hanno per traiettoria un'elica circolare (in particolare, una circonferenza o una retta) ⁽²⁾.

Il risultato ottenuto si presta evidentemente ad essere esteso al caso di un sistema olonomo qualunque, in base alla già menzionata rappresentazione del moto di un tale sistema mediante il moto di un punto di un S_n : ma su ciò non insisteremo, non presentando la cosa un effettivo interesse.

Soltanto osserveremo che, se si considera un punto materiale P vincolato a restare sopra un piano fisso (e privo di attrito), le considerazioni ora svolte sono sufficienti a concludere che, l'essere $P_{t,\tau}$ funzione di δ (cioè, se si vuole, della distanza geodetica delle due posizioni occupate da P agli istanti t e $t + \tau$ sulla superficie che rappresenta il vincolo), caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica, quelli che hanno per traiettoria una circonferenza (in particolare una retta).

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Il prof. Almansi, in una Memoria *Sopra una delle esperienze di Plateau* ⁽³⁾ è stato condotto ad enunciare e a dimostrare la seguente proposizione:

Se $f(x)$: 1°) è una funzione finita e continua insieme alla sua derivata $f'(x)$ in tutto l'intervallo (a, b) ;

2°) assume lo stesso valore negli estremi a e b ;

3°) soddisfa all'uguaglianza $\int_a^b f(x) dx = 0$;

⁽¹⁾ Ciò che necessariamente accadrà nel caso, effettivamente possibile, che la traiettoria di P sia una circonferenza.

⁽²⁾ Ciò equivale a dire che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$, caratterizza i moti di P che si svolgono sotto l'azione di una resistenza idraulica e di una forza normale alla velocità del tipo $F_N = vV \Lambda H$ [cfr. la nota (2)].

⁽³⁾ Annali di Matematica, 1906.

allora è anche

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \geq \left(\frac{2\pi}{b-a} \right)^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx .$$

La dimostrazione che ne dà il chmo Autore procede per gradi, comincia cioè a rivolgersi a funzioni che soddisfano a certe peculiari condizioni, che va poi via via allargando fino a giungere alla classe delle funzioni per cui il teorema stesso è enunciato.

In questa breve Nota, ci proponiamo di giungere direttamente alla proposizione detta nella sua forma più generale, enunciandola per la classe delle funzioni *assolutamente continue* (funzioni integrali), che è più estesa di quella considerata dall'Almansi, facendo anche vedere che, abbandonando l'*assoluta continuità*, si hanno funzioni per le quali la proposizione stessa non è più valida, pur essendo tali funzioni a *variazione limitata*.

Dimostriamo anzi quest'altro teorema, che contiene il precedente come caso particolare:

« Se $f(x)$ è una funzione assolutamente continua nell'intervallo (a, b) ⁽¹⁾, nei cui estremi assume lo stesso valore, e se esiste l'integrale $\int_a^b [f'(x)]^2 dx$, e

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx - \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \leq \frac{1}{b-a} \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \quad (*)$$

Avvertiamo che noi, come l'Almansi, ci fondiamo sulla formula di Parseval, relativa alle serie di Fourier.

La Nota termina con una proposizione relativa al rapporto fra l'integrale di f^2 e quello di f'^2 .

1. Facciamo un cambiamento di variabile mediante la posizione

$$x = a + \frac{b-a}{2\pi} \theta ,$$

che fa corrispondere all'intervallo (a, b) , l'altro $(0, 2\pi)$. La funzione $f(x)$ viene così mutata in

$$f\left(a + \frac{b-a}{2\pi} \theta\right) = F(\theta) ,$$

e questa $F(\theta)$ risulterà ancora assolutamente continua, ed assumerà lo stesso

⁽¹⁾ $b > a$.

^(*) Relativamente dai due termini della differenza qui considerata, si sa già che il loro rapporto è sempre ≤ 4 , se è $f(a) = f(b) = 0$ (ved. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, Paris, Hermann, 1910, pag. 335).

valore negli estremi 0 e 2π . La disuguaglianza da dimostrare diventerà poi

$$\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^2 d\theta - \int_0^{2\pi} [F'(\theta)]^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta \right]^2.$$

La funzione $F(\theta)$, essendo assolutamente continua è *a fortiori* continua e a variazione limitata. Il *criterio di Jordan* ci assicura allora (avendosi $F(0) = F(2\pi)$) che tale funzione è sviluppabile in serie di Fourier, uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px),$$

Inoltre, sempre per l'assoluta continuità, esiste la derivata $F'(\theta)$ in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, ad eccezione di più di un insieme di misura nulla, ed è

$$\int_0^{\theta} F'(\theta) d\theta = F(\theta) - F(0).$$

Ricordando ancora l'uguaglianza $F(0) = F(2\pi)$, abbiamo ⁽¹⁾ che la serie di Fourier della derivata $F'(\theta)$ si ottiene derivando termine a termine quella di $F(\theta)$. Possiamo scrivere così (adottando una notazione dovuta a Hurwitz)

$$F'(\theta) \sim \sum_{p=1}^{\infty} p(-a_p \sin px + b_p \cos px).$$

Dalla formula di Parseval, estesa da Fatou ⁽²⁾ alle funzioni di quadrato integrabile, deduciamo allora,

$$\int_0^{2\pi} F^2(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) \right\}$$

$$\int_0^{2\pi} [F'(\theta)]^2 d\theta = \pi \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p^2 (a_p^2 + b_p^2) \right\},$$

$$\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^2 d\theta - \int_0^{2\pi} [F'(\theta)]^2 d\theta \leq \frac{\pi}{2} a_0^2 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta \right]^2,$$

che è appunto quanto si voleva dimostrare. Si vede anche che il segno di uguaglianza sta solo quando sia

$$a_p = b_p = 0 \quad (p = 2, 3, \dots),$$

⁽¹⁾ H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonometriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, pag. 104.

⁽²⁾ P. Fatou, *Séries trigonometriques de séries de Taylor*, Acta math., 1906.

vale a dire,

$$F(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta$$

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \left(2\pi \frac{x-a}{b-a} \right) + b_1 \sin \left(2\pi \frac{x-a}{b-a} \right).$$

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita nel modo seguente. Per ogni

$$(1) \quad x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots,$$

dove i numeratori a_1, a_2, a_3, \dots sono uguali a zero oppure a 2, si abbia

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots \right\}.$$

Per definire $f(x)$ sui punti rimanenti dell'intervallo $(0, 1)$, facciamo così. Consideriamo l'insieme I dei punti di $(0, 1)$; dati dalla (1): questo insieme è *perfetto* e si ottiene asportando dall'intervallo detto tutti i punti *interni* agli intervalli:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\left(\frac{0}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{0}{3} + \frac{2}{3^3} \right), \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^3} \right)$$

$$\left(\frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} \right), \quad \left(\frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} \right),$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} \right), \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} \right),$$

.....

Negli estremi di uno qualunque di questi intervalli (che diconsi *intervalli contigui ad I*) la funzione $f(x)$ ha il medesimo valore: per esempio in $\frac{1}{3}$ si ha:

$$x = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots, \quad f(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{0}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots \right\} = \frac{1}{2},$$

e in $\frac{2}{3}$

$$x = \frac{2}{3}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots \right\} = \frac{1}{2}.$$

Definiamo, allora, la $f(x)$ in ciascuno degli intervalli contigui ad I, ponendola uguale al valore che essa stessa assume negli estremi dell'intervallo considerato.

La funzione così definita è continua su tutto $(0, 1)$ e non mai decrescente: essa è quindi anche a variazione limitata. In ogni intervallo contiguo a I (esclusi gli estremi) esiste la derivata $f'(x)$, che è uguale a zero. E poichè la somma delle lunghezze di questi intervalli è uguale ad 1 (tale somma è, infatti,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \dots = \\ = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots \right\} = 1, \end{aligned}$$

si ha

$$\int_0^1 f'(x) dx = 0.$$

Ma è

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1,$$

dunque, essendo,

$$\int_0^1 f'(x) dx \neq f(1) - f(0),$$

la $f(x)$ non è assolutamente continua.

Definiamo ora la $f(x)$ in $(1, 2)$ mediante la scrittura

$$f(x) = f(2 - x),$$

e in $(2, 4)$ mediante

$$f(x) = -f(4 - x).$$

Per la funzione così definita si ha: $f(0) = f(4)$

$$\int_0^4 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^4 [f'(x)]^2 dx = 0$$

$$\int_0^4 [f(x)]^2 dx > 0,$$

e non può dunque essere verificata la disuguaglianza da noi dimostrata per le funzioni assolutamente continue.

3. Vogliamo aggiungere qualche considerazione sul rapporto fra gli integrali di f^2 e f'^2 . Abbiamo già ricordato che, nell'ipotesi $f(a) = f(b) = 0$, è

$$\int_a^b f^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi} \right)^2 \int_a^b f'^2 dx.$$

Se fosse solamente $f(a) = 0$, quale sarebbe il massimo del rapporto dei due integrali considerati?

Si ponga

$$J_p = \int_a^b (p^2 f'^2 - f^2) dx,$$

e si cerchi il minimo di quest'integrale fra tutte le funzioni che soddisfano alla condizione $f(a) = 0$.

Le *estremali* dell'integrale detto si ottengono integrando l'equazione differenziale

$$f + p^2 f'' = 0,$$

e sono date da

$$f = c_1 \cos \frac{x}{p} + c_2 \sin \frac{x}{p}.$$

Per due punti qualunque di ascisse x_1 e x_2 , passa sempre una di queste estremali, ed una sola, tutte le volte che è $|x_1 - x_2| < p\pi$; dunque se è

$$p > \frac{b-a}{\pi} > 0;$$

è sempre possibile circondare l'estremale che congiunge i punti $(a, 0)$, (b, h) , dove h è qualunque, con un fascio di estremali che ricopra tutta la striscia compresa fra le rette $x = a$, $x = b$. E poichè qui la derivata seconda rispetto a f' di $p^2 f'^2 - f^2$ è sempre positiva, l'estremale detta dà il minimo assoluto fra tutte le funzioni che assumono in a e in b rispettivamente i valori 0 e h .

Indichiamo con $J_p(h)$ il valore minimo di J_p corrispondente ad h . L'estremale che congiunge $(a, 0)$ con (b, h) è

$$f = \sin \frac{h}{p} \frac{b-a}{p} \sin \frac{x-a}{p},$$

e si ha perciò

$$J_p(h) = ph^2 \cotg \frac{b-a}{p}.$$

È dunque

$$J_p(h) \geq 0 \quad \text{per} \quad \frac{b-a}{p} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\text{con } J_p(h) = 0 \text{ solo se è } \frac{b-a}{p} = \frac{\pi}{2} \right),$$

$$J_p(h) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{b-a}{p} > \frac{\pi}{2}.$$

Se ne conclude che

Se $f(x)$ è una funzione assolutamente continua che si annulla in a , e tale che il quadrato della sua derivata — considerato là dove questa derivata esiste — sia integrabile, è

$$\int_a^b f'^2 dx \leq 4 \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'^2 dx,$$

potendo aversi effettivamente il segno di uguaglianza ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sur les surfaces de genres zéro et de bi-genre un.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

Lorsque M. Enriques introduisit, dans la théorie des surfaces algébriques, la notion de plurigendre, il remarqua que la surface du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, avait les genres arithmétique et géométrique nuls ($p_a = p_g = 0$), mais le bigendre égal à l'unité ($P_2 = 1$) ⁽²⁾. Plus tard, M. Enriques démontra que toute surface algébrique régulière, dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, peut se ramener, par une transformation birationnelle, à cette surface du sixième ordre ⁽³⁾. M. Enriques fit, de plus, une étude très

⁽¹⁾ Considerando delle funzioni a derivata limitata e nulle in a , E. E. Levi (*Sui criteri sufficienti per il massimo e per il minimo nel calcolo delle variazioni*, Annali di matematica, tomo XXI, ser. III, Lemma I) aveva già trovato che l'integrale di f'^2 , non può superare quello di f'^2 moltiplicato per $\frac{(b-a)^2}{2}$.

⁽²⁾ F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Chap. VI, n. 39), Memorie della Soc. ital. delle Scienze (dei XL), 1896, ser. 3^a, tom. X. On sait que M. Castelnuovo a, vers la même époque, démontré que les conditions de rationalité d'une surface sont $p_a = P_2 = 0$.

⁽³⁾ F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, idem., 1906, ser. 3^a, tom. XIV. Au sujet des surfaces de genres zéro et de bigenre un, voir aussi: G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari*, Rendiconti

complète de cette surface, et démontra qu'elle est caractérisée soit par les conditions $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, soit par les conditions équivalentes $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$.

Dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (1), MM. Enriques et Severi ont remarqué qu'il pouvait exister, sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), des involutions d'ordre deux, dépourvues de points unis, représentables sur des surfaces de genres zéro et de bigenre un. Ensuite, M. Enriques a fait voir qu'inversement une surface de genres zéro et de bigenre un peut toujours être considérée comme représentant une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un (2).

En d'autres termes, si l'on considère la surface Φ , d'ordre six, passant doublement par les arêtes du tétraèdre dont les faces sont

$$x = 0, y = 0, z = 0, v \equiv ay + by + cz + d = 0,$$

cette surface a pour équation (3)

$$(1) \quad \varphi_2(xyz, yzv, zvz, vxy) + xyzv f_2(x, y, z, v) = 0,$$

φ_2 et f_2 étant des polynômes du deuxième degré, et la surface F, représentée par les équations (1) et

$$u^2 = xyzv,$$

est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). De plus, M. Enriques a montré que cette surface F, de genres un, peut se ramener (par une transformation birationnelle) à une quadrique double Q.

Il existe donc, sur la surface F, deux involutions d'ordre deux, l'une représentable sur Φ , l'autre sur Q. Chacune de ces involutions détermine une transformation birationnelle de F en elle-même. Je me propose de démontrer, dans cette Note, que les deux transformations ainsi définies sont permutables, et que leur produit engendre une involution d'ordre deux et de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

En joignant ces résultats à ceux de M. Enriques, on pourra donc énoncer le théorème suivant:

del Circ. Matem. di Palermo, 1910, tom. XXIX; L. Godeaux, *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, Bulletin de la Société Mathématique de France, 1913, tom. XLI; *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres* $p_d = p_g = 0$, $P_6 = 1$, Bulletin de l'Académie roumaine, 1913, tom. II.

(1) Acta Mathematica, vol. XXXII, XXXIII (XXXII, n. 38).

(2) Enriques, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere 1*, Rend della R. Accad. di Bologna, 13 genn. 1908.

(3) Enriques, *Introduzione...*, loc. cit. (note au n. 39).

Toute surface algébrique Φ , de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), représente une involution d'ordre deux, dépourvue de points unis, appartenant à une surface F de genres un ($p_a = p_4 = 1$). Cette surface F possède trois transformations birationnelles involutives permutable en elle-même :

La première engendre l'involution de genres zéro et de bigenre un représentée par Φ .

La deuxième engendre une involution rationnelle qui permet de représenter F sur une quadrique double (ayant une courbe de diramation d'ordre huit).

La troisième engendre une involution de genres un ($p_a = P_3 = 1$).

1. Soit Φ la surface algébrique de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), représentée par l'équation

$$(1) \quad \varphi_2(xyz, yzv, zvx, vxy) + xyzv f_2(x, y, z, v) = 0,$$

dans laquelle φ_2 et f_2 désignent des polynômes du deuxième degré et v une fonction linéaire $ax + by + cz + d$. La surface Φ passe doublement par les arêtes du tétraèdre dont les faces sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad v \equiv ax + by + cz + d = 0.$$

De plus, c'est une surface générale de sa classe (Enriques).

Considérons la surface F représentée par les équations (1) et

$$u^2 = xyzv.$$

Elle est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), et la transformation T_1 , d'équations

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad u' = -u,$$

engendre, sur F , une involution d'ordre deux, dépourvue de points unis, représentable sur Φ (Enriques).

Considérons, sur la surface Φ , un système complet $|\Gamma|$, de genre $\pi > 1$, et son adjoint $|\Gamma'|$. Ces systèmes ont le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$. En général, ils sont dépourvus de points-base. Si Γ a des points-base, ils sont au nombre de deux et les courbes Γ sont hyperelliptiques. Il est aisé de voir que les Γ' sont également hyperelliptiques et que $|\Gamma'|$ a, par suite, deux points-base ⁽¹⁾.

Désignons par \bar{C}, \bar{C}' les courbes de F qui correspondent respectivement aux courbes Γ, Γ' . Soit $C|$ le système complet contenant les courbes \bar{C} . Le système C a le degré $4\pi - 4$, le genre et la dimension $2\pi - 1$.

⁽¹⁾ Enriques, *Sopra le superficie..*, loc. cit. (n. 7).

Entre une courbe Γ et une courbe \bar{C} , nous avons une correspondance (1, 2) dépourvue de points de diramation. Par suite, un groupe canonique de Γ a pour correspondant un groupe canonique de \bar{C} . Or, les Γ' découpent, par définition, des groupes canoniques sur les Γ ; les courbes correspondantes \bar{C}' découpent donc des groupes canoniques sur les courbes \bar{C} . Or, les courbes C découpent également des groupes canoniques sur les \bar{C} . Par suite, le système $|C|$ comprend les courbes \bar{C}' .

Les courbes de F qui correspondent à des courbes de genre supérieur à l'unité, de Φ et à leurs adjointes, sont équivalentes.

2. Supposons actuellement que $|\Gamma|$ soit un faisceau de genre deux ($\pi=2$). De pareils faisceaux existent certainement sur Φ ; l'un d'eux est, par exemple, découpé sur la surface (1) par les plans $\lambda x + \mu y = 0$.

Les courbes Γ' sont également de genre deux et forment un faisceau. Les faisceaux $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ ont, de plus, chacun, deux points-base.

Le système $|C|$ a maintenant le degré quatre, le genre et la dimension trois.

On sait qu'une courbe de genre trois possédant une involution (∞^1) d'ordre et de genre deux, est hyperelliptique ⁽¹⁾. Les courbes \bar{C} et \bar{C}' sont dans ce cas. Sur chaque courbe \bar{C} se trouve donc une g_2^1 , et les ∞^2 groupes de ces $\infty^1 g_2^1$ forment une involution I_2 sur F. Mais les courbes C découpant sur les \bar{C} des groupes canoniques, chacune d'elles contient ∞^1 groupes de I_2 et, par conséquent, $|C|$ est composé avec I_2 . Rapportons projectivement les courbes C aux plans d'un S_3 ; F se transforme en une quadrique double Q qui a, nécessairement, une courbe de diramation d'ordre huit ⁽²⁾. Il en résulte que toutes les courbes C sont hyperelliptiques et que les groupes de I_2 situés sur une courbe \bar{C}' , y forment la g_2^1 dont nous avons reconnu l'existence plus haut (une courbe de genre trois ne peut en effet contenir plus d'une g_2^1).

Nous désignerons par T_2 la transformation birationnelle involutive de F engendrant I_2 .

3. Sur une courbe C, hyperelliptique, de genre trois, T_1 change un groupe de la g_2^1 en un groupe de cette série. À deux groupes de la g_2^1 conjugués par rapport à T_1 , correspondent deux points de Q, c'est-à-dire qu'à T_1 correspond une transformation birationnelle Θ de Q en elle-même. De plus, T_1 étant involutive, il en est de même de Θ .

D'autre part, à deux points de F conjugués par rapport à la transformation $T_3 = T_1 T_2$, correspondent deux points de Q conjugués par rapport à Θ . On en conclut que T_3 est involutive, c'est-à-dire que T_1 , T_2 sont per-

⁽¹⁾ Voir par exemple: R. Torelli, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1914, tom. XXXVII (n. 32, note 33).

⁽²⁾ Enriques, *Sui piani doppi di genere uno*, Memorie della Soc. ital. delle Scienze (dei XL), ser. 3^a, tom. X, 1896.

mutables ($T_1 T_2 = T_3 T_1$). On sait d'ailleurs que T_3 engendre, sur les courbes \bar{C} ou \bar{C}' , des γ'_2 elliptiques (1).

Dans le système $|C|$, il y a deux faisceaux $|\bar{C}|, |\bar{C}'|$, dont les courbes sont invariantes pour T_1 et T_3 , et aucune courbe C n'appartenant pas à ces faisceaux ne jouit de cette propriété. Par conséquent, la transformation Θ laisse invariantes des sections planes de Q appartenant à deux faisceaux. En d'autres termes, Θ est une homographie involutive bi-axiale.

Les axes de Θ ne sont pas des génératrices de Q , car les courbes \bar{C}, \bar{C}' sont des courbes de genre trois et non des courbes elliptiques. Par suite, Θ laisse invariants quatre points de Q . Il y aura donc, ces quatre points n'étant pas en général sur la courbe de diramation de Q , huit points de F invariants pour une des transformations T_1, T_3 . Or, par construction, T_1 ne laisse aucun point de F invariant: donc T_3 engendre une involution d'ordre deux possédant huit points unis; et cette involution est, par conséquent, de genres un ($p_a = P_4 = 1$) (2).

Meccanica. — *Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta.* Nota dell'ing. dott. G. ARMELLINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Meccanica. — *Potenziali Newtoniani dell'elasticità.* Nota di P. BURGATTI, presentata dal Corrisp. E. MARCOLONGO.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) Torelli, loc. cit.

(2) L. Godeaux, *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un*, Bull. Acad. roy. de Belgique, 1913; *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un*, Annales de l'École Normale (en cours de publication).

Astronomia pratica. — *Sulla costruzione delle tavole per la correzione del passo dei microscopi micrometrici.* Nota di B. VIARO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. Per ricavare la misura degli angoli dai cerchi divisi forniti di microscopi micrometrici ⁽¹⁾, si sogliono fare le due letture micrometriche l ed l' rispettivamente alle divisioni a ed $a+1$ fra le quali viene a trovarsi lo zero micrometrico ⁽²⁾. La somma e la differenza delle due letture, quest'ultima presa sempre nel senso $l' - l$, servono a dare la lettura corretta.

Il prof. Lorenzoni nella sua Memoria: *Determinazioni di Azimut eseguite nel R. Osservatorio di Padova in giugno e luglio 1874 con un Altazimut di Repsold, ed in luglio 1890 con un Altazimut di Pistor, Padova 1891*, ci offre, in fine di pag. 11, la correzione seguente della somma delle due letture:

$$(1) \quad A(l + l') = -(l' - l) + \frac{l' - l}{I} \cdot (l + l'),$$

qualora si avverta che qui in luogo del valore particolare 1200 che compete al Repsold, si è posto I per indicare il numero di parti dell'ordine infimo stimabile, equivalente alle rivoluzioni r occorrenti per far percorrere al filo mobile la distanza tra due divisioni consecutive del cerchio ⁽³⁾. In questa

(¹) L'applicazione dei microscopi micrometrici ai cerchi divisi è di origine inglese, e già nel 1789 il celebre strumento di Ramsden, ordinato dal Piazzì a Londra, aveva i microscopi micrometrici per leggere i due cerchi azimutale e verticale. G. Piazzì, *Della Specola di Palermo*, Palermo, 1792, pp. 20 e 25.

(²) Già nel 1814 Bessel insegnava che il risultato era più attendibile qualora venissero sempre puntati ambedue i segni di divisione del cerchio fra cui si trova lo zero del micrometro; e dichiarava che egli seguiva tal regola senza eccezione: *Astr. Beob. Königsberg*, I, Abth, 1815, pag. VII (Auch wird das Resultat noch dadurch zuverlässiger etc....).

(³) La (1) si ricava dalla formola esatta seguente:

$$A(l + l') = -(l' - l) + \frac{l' - l}{I} \left\{ (l + l') - (l' - l) \right\} \left\{ 1 - \frac{l' - l}{I} \right\}^{-1}$$

abbandonando nel secondo membro i termini in $l' - l$ d'ordine superiore al primo. Cfr. Lorenzoni, loc. cit., pag. 11, nonchè A. Abetti, *Il Piccolo Meridiano di Arcetri*. Fasc. num. 7, pag. 34, formola (4).

Le formole date dal Weineck, A. N. vol. 109, pag. 201 (a) e (b), e quella dell'Albrecht, *Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, vierte Auflage*, Leipzig 1908, pag. 49, sono parimente formole esatte. Il passaggio di esse a quella di Lorenzoni può farsi facilmente, tenendo conto delle rispettive notazioni.

formola intenderemo non soltanto I. ma altresì la somma $l + l'$ e la differenza $l' - l$ espresse in parti dell'ordine intimo, cioè in quei decimi che si stimano a vista sul tamburo che muove la vite del microscopio micrometrico; ed essi sono dunque decimi delle parti p in cui il tamburo medesimo si trova diviso.

2. La (1) può scriversi come segue:

$$\Delta(l + l') = \frac{(l + l') - I}{I} \cdot (l' - l).$$

e ponendo:

$$(2) \quad \frac{(l + l') - I}{I} = C,$$

sarà

$$(3) \quad \Delta(l + l') = C(l' - l)$$

Questa formola dice che la correzione $\Delta(l + l')$ è data dal prodotto di due fattori, il primo dei quali dipende dalla somma $l + l'$ delle due letture, e l'altro è la differenza delle medesime. In luogo di un valore particolare della differenza $l' - l$ si può assumere un valore R che sia la media aritmetica di singoli valori $l' - l$ ottenuti da una serie di osservazioni ⁽¹⁾.

Il calcolo della correzione $\Delta(l + l')$ potrà farsi rapidamente, anche col sussidio delle tavole di moltiplicazione, quando si abbia una tavoletta che dia per interpolazione a vista il valore di C corrispondente al particolare valore della variabile $l + l'$ ⁽²⁾.

Questa tavoletta può costruirsi come segue. I valori minimo e massimo di $l + l'$ sono 0 e $2I$, ed i corrispondenti valori di C sono, per la formola (2), rispettivamente -1.00 e $+1.00$. Se ora poniamo ⁽³⁾

$$(4) \quad K = \frac{I}{10}$$

⁽¹⁾ « Correction for Runs » nelle: Greenwich, *Astronomical observations in the Year*, 1837. Introduction, pag. XVI.

⁽²⁾ A. Abetti, fasc. cit., pag. 36.

⁽³⁾ Non è strettamente necessario che sia $K = \frac{I}{10}$, per cui in generale porremo

$$K = \frac{I}{m}$$

Allora sarà $I = mK$, e posto $l + l' = nK$, si avrà

$$C = \frac{nK - mK}{mK} = \frac{n - m}{m}$$

sarà $I = 10K$ e quindi $2I = 20K$, e posto ancora

$$l + l' = nK$$

dove $n = 0 \ 1 \ 2 \dots 20$, avremo dalla (2):

$$(5) \quad C = \frac{nK - 10K}{10K} = \frac{n - 10}{10}.$$

Facendo variare n da 0 a 20, si avranno i seguenti argomenti $l + l'$:

$$0 \ K \ 2K \dots 9K \ 10K \ 11K \dots 20K,$$

a cui corrisponderanno rispettivamente i valori di C :

$$-1.00 \ -0.90 \ -0.80 \dots -0.10 \ 0.00 \ +0.10 \dots +1.00,$$

laonde si ha la seguente *tabella dei valori del coefficiente C*:

$nK = l + l'$	C	$nK = l + l'$
0 . K	— 1.00 +	20 . K
1	— 0.90 +	19
2	— 0.80 +	18
3	— 0.70 +	17
4	— 0.60 +	16
5	— 0.50 +	15
6	— 0.40 +	14
7	— 0.30 +	13
8	— 0.20 +	12
9	— 0.10 +	11
10	0.00	10

Il C è negativo per gli argomenti di sinistra,
ed è positivo per quelli di destra.

Questa tavola è generale, e nei casi particolari dei vari strumenti, converrà per ciascun I calcolare il rispettivo K .

3. Consideriamo ora diversi strumenti per i quali I , espresso in decimi delle parti del tamburo, sia 1200 1500 1800 2400 ed avremo la seguente *tabella degli argomenti*:

n K	I			
	1200	1500	1800	2400
0, K	0	0	0	
1	120	150	180	240
2	240	300	360	480
3	360	450	540	720
4	480	600	720	960
5	600	750	900	1200
6	720	900	1080	1440
7	840	1050	1260	1680
8	960	1200	1440	1920
9	1080	1350	1620	2160
10	1200	1500	1800	2400
11	1320	1650	1980	2640
12	1440	1800	2160	2880
13	1560	1950	2340	3120
14	1680	2100	2520	3360
15	1800	2250	2700	3600
16	1920	2400	2880	3840
17	2040	2550	3060	4080
18	2160	2700	3240	4320
19	2280	2850	3420	4560
20	2400	3000	3600	4800

S'intuisce subito come questi argomenti siano prontamente convertibili in rivoluzioni intere e parti di rivoluzione. Le due prime colonne danno gli argomenti per i due strumenti adoperati dal prof. Lorenzoni nelle due determinazioni di azimut trattate nella Memoria citata fin da principio. Le caratteristiche di questi strumenti sono :

A) Altazimut di Repsold adoperato nel 1874. L'intervallo sul cerchio è $4' = 240''$, percorsi dal filo mobile del micrometro con 2 rivoluzioni. Il tamburo è diviso in 60 parti, quindi il valore di una rivoluzione e quello di una parte, sono: $r = 2'$, $p = 2''$, ed $I = 2r \ 0p = 1200$ decimi di parte.

B) Altazimut di Pistor adoperato nel 1890: intervallo sul cerchio $5' = 300''$, percorsi dal filo mobile del micrometro con 2 rivoluzioni e mezza. Tamburo diviso in 60 parti, $r = 2'$, $p = 2''$, $I = 2r \ 30p = 1500$.

La terza colonna della tavola dà gli argomenti per il Cerchio Meridiano di Reichenbach di Torino, nonchè per quello di Starke di Padova, e le caratteristiche comuni sono:

C) Intervallo sul cerchio $3' = 180''$, percorsi dal filo mobile del mi-

crometro con 3 rivoluzioni; tamburo diviso in 60 parti, $r = 1'$, $p = 1''$, $I = 3^r 0^p = 1800$.

Finalmente la quarta colonna dà gli argomenti per i due Cerchi Meridiani Bamberg di Arcetri e di Torino, le cui caratteristiche sono:

D) Intervallo sul cerchio $4' = 240''$, percorsi dal filo mobile con 2 rivoluzioni; tamburo diviso in 120 parti $r = 2'$, $p = 1''$, $I = 2^r 0^p = 2400$.

4. Applicando la formola (3), cioè moltiplicando i valori di C per i seguenti valori assoluti di $l' - l$ 2 4 6 8 10 12 14 16 ... 30, scelti nell'ipotesi che l'aggiustamento del microscopio micrometrico sia tale per cui il limite superiore della differenza $l' - l$ sia 30, si ottiene la seguente *tavola base* a due argomenti $l + l'$ ed $l' - l$, da cui si hanno le correzioni $\Delta(l + l')$ per qualsiasi strumento.

$l+l'$	$l'-l$															$l+l'$
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	
10. K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10. K
9	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	11
8	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	12
7	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	13
6	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	14
5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	15
4	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	16
3	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	17
2	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	18
1	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	19
0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	20

Le correzioni date da questa tavola sono espresse in centesimi di parti del tamburo, mentre l'argomento $l' - l$ è espresso in decimi. Per un valore particolare della somma $l + l'$ appartenente agli argomenti della prima colonna a sinistra il segno della correzione $\Delta(l + l')$ è opposto al segno della differenza delle due letture presa nel senso $l' - l$; ed è uguale per gli argomenti dell'ultima colonna che sta a destra.

Per rendere praticamente adoperabile questa tavola per uno strumento qualsiasi, non occorre altro che sostituire al luogo degli argomenti generali delle due colonne prima ed ultima, i valori particolari calcolati col relativo I. Tali valori per i sei strumenti considerati sono i seguenti:

A		B		C		D	
sinistra	destra	sinistra	destra	sinistra	destra	sinistra	destra
2 ^r 0 ^p	2 ^r 0 ^p	2 ^r 30 ^p	2 ^r 30 ^p	3 ^r 0 ^p	3 ^r 0 ^p	2 ^r 0 ^p	2 ^r 0 ^p
1 48	2 12	2 15	2 45	2 42	3 18	1 96	2 24
1 36	2 24	2 0	3 0	2 24	3 36	1 72	2 48
1 24	2 36	1 45	3 15	2 6	3 54	1 48	2 72
1 12	2 48	1 30	3 30	1 48	4 12	1 24	2 96
1 0	3 0	1 15	3 45	1 30	4 30	1 0	3 0
0 48	3 12	1 0	4 0	1 12	4 48	0 96	3 24
0 36	3 24	0 45	4 15	0 54	5 6	0 72	3 48
0 24	3 36	0 30	4 30	0 36	5 24	0 48	3 72
0 12	3 48	0 15	4 45	0 18	5 42	0 24	3 96
0 0	4 0	0 0	5 0	0 0	6 0	0 0	4 0

Operando la sostituzione per gli strumenti A e B otterremo le tavole del prof. Lorenzoni inserite a pag. 12 ed a pag. 45 della sua Memoria. Infatti scegliamo, per esempio, per lo strumento A, l'argomento di riga sesta cioè $l + l' = 1^r 0^p$ e scegliamo nelle colonne $l' - l$ della tavola immediatamente precedente quella che corrisponde al valore 8, troveremo nella stessa tavola la correzione 40, come si ha per gli stessi argomenti dalla tavola Lorenzoni, pag. 12. E per lo strumento B, cogli stessi argomenti $l + l' = 1^r 0^p$, $l' - l = 8$, avvertito che il primo trovasi in riga settima, troveremo nella tavola base la correzione 48, come si ha dalla tavola Lorenzoni di pag. 45.

5. Esempio per il caso del Piccolo Meridiano di Arcetri, tipo D. Il 13 marzo 1914, in una delle mie ultime osservazioni al Piccolo Meridiano di Arcetri, puntando in distanza zenitale la stella BD + 13° 1655 8^m.4 = Lpz I 2882 ⁽¹⁾, feci le seguenti letture ai due microscopi micrometrici:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Micr. I} & 30^{\circ}32' 0^r798 & \text{Micr. II} \quad 0^r556 \\
 & \underline{0\ 808^{+10}} & \underline{0\ 540^{-16}} \\
 l + l' = & 1606 & 1096 \quad \text{in decimi di parti del} \\
 & & \text{tamburo.}
 \end{array}$$

Ricordando che in questo strumento una rivoluzione è uguale a 120^p, avremo gli argomenti:

$$l + l' \left\{ \begin{array}{l} 1^r\ 40^p\ 6 \\ 0\ 109\ 6 \end{array} \right. \quad l' - l \left\{ \begin{array}{l} + 10 \\ - 16. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Cfr. Astr. Nachr. 4726.

Ora nella tavola precedente troveremo gli argomenti $l + l'$ più prossimi a questi, nelle righe quarta e sesta; con questa cognizione e cogli argomenti $l' - l$ avremo dalla *tavola base* le correzioni -30 e $+80$ in centesimi, quindi sarà:

$$\text{Micr. I } 1606 - 3.0 = 1603 \quad \text{e} \quad \text{Micr. II } 1096 + 8.0 = 1104.$$

Per avere i secondi della distanza zenitale dovremo dividere la somma di questi due numeri per 4 e per 10 ed avremo:

$$67''.7 = 1' 7''.7 \text{ e finalmente} \\ z = 30^\circ 33' 7''.7.$$

Lo stesso risultato è stato da me ottenuto colla tavola dei coefficienti C che tengo sempre in uso.

Astronomia pratica. — *Sulla correzione di run alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico.* Nota di G. SILVA, presentata dal Socio MILLOSEVICH.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica-chimica. — *Sul punto di fusione dell'arsenico*⁽¹⁾. Nota di LUIGI ROLLA, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO.

Lo studio delle leghe di arsenico e di antimonio, fatto recentemente da Parravano e De Cesaris⁽²⁾, ha stabilito che, conformemente alla regola generale enunciata da Tammann, l'esistenza di un supposto arseniuro di formola Sb_3As è senz'altro da escludersi, perchè i due elementi, invece, danno luogo a una serie continua di cristalli misti. Quanto all'altro arseniuro, al quale spetterebbe la formola SbAs_3 , la cui esistenza pareva che le ricerche anteriori rendessero assai probabile, il diagramma di fusione non permette di affermar nulla, perchè la volatilità dell'arsenico impedisce di aver leghe contenenti più del 40 % in peso di questo elemento.

Ora, Landolt⁽³⁾ e Mallet⁽⁴⁾ credettero di poter fissare il punto di fusione dell'arsenico (a pressione ordinaria) fra 630° e 970° ; e Crookes⁽⁵⁾

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Genova

⁽²⁾ Gazz. chim. it. (1912), I, 341.

⁽³⁾ Chem. Jahrb. (1859), 181.

⁽⁴⁾ Ibid., 1872, pag. 210.

⁽⁵⁾ Nature (1905), 595.

credette di poter dimostrare che esso avrebbe dovuto essere a 615°. Questo valore è, certamente, troppo basso.

Jonker ⁽¹⁾, scaldando l'arsenico cristallino, in un tubo chiuso, fino a 800°, non osservò alcuna traccia di fusione; ma recentemente Goubau ⁽²⁾ trovò 817°: e prima di lui, con metodo eguale, Jolibois ⁽³⁾, 850° [$\pm 10^\circ$].

L'esistenza delle *curve di frequenza atomica* ⁽⁴⁾ dà modo di avere un criterio per stabilire, almeno approssimativamente, quale sarebbe, alla pressione ordinaria, il grado di temperatura al quale l'ampiezza delle oscillazioni degli atomi dell'arsenico diventa dello stesso ordine di grandezza della distanza interatomica. E, per la definizione di Lindemann ⁽⁵⁾, coincide col punto di fusione.

Consideriamo, per esempio, le leghe:

[I]	Sb: 79,40 %	} P. F. 615°
	As: 29,60 "	
[II]	Sb: 83,25 "	} P. F. 612°
	As: 16,75 "	
[III]	Sb: 94,44 "	} P. F. 623°
	As: 5,56 "	

La [I] corrisponde, approssimativamente, alla composizione del composto Sb_2As ; la [II] corrisponde al punto di minimo della curva di fusione; la [III] rappresenta una soluzione solida *diluita* di arsenico nell'antimonio.

Si avrà, per tutte, una differenza tra il calore specifico trovato e quello calcolato colla regola del miscuglio: e, precisamente, si troverà per tutte un calore specifico più grande di quello che si calcola.

Col calorimetro a blocco di rame di Koref ⁽⁶⁾, ebbi i seguenti numeri ⁽⁷⁾:

⁽¹⁾ Zeit. f. anorg. ch., 62, 89 (1909).

⁽²⁾ Compt. rend., 158, 121 (1914).

⁽³⁾ Compt. rend., 152, 1767 (1907).

⁽⁴⁾ Rend. dei Lincei, seduta del 5 aprile 1914.

⁽⁵⁾ Phys. Zeit., IV (1909), 609.

⁽⁶⁾ Ann. d. Phys., 36 (1911), 49.

⁽⁷⁾ Nella tabella, t_0 significa la temperatura iniziale, in gradi centigradi, della sostanza; t la temperatura finale, corretta, del blocco di rame; g il peso in grammi; E l'effetto calorifico.

Le leghe sono quelle stesse che servirono a Farravano e De Cesaris per tracciare il diagramma di fusione.

LEGA [I].

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 191°,2	— 88°,3	25,02	1,313	0,0525	} media: 0,0520
— 189,6	— 88,2	"	1,296	0,0518	
— 189,4	— 88,6	"	1,288	0,0515	
— 189,8	— 88,2	"	1,306	0,0522	
0	— 75,1	"	1,338	0,0535	} media: 0,0541
0	— 74,9	"	1,371	0,0548	
0	— 74,2	"	1,351	0,0540	

LEGA [II].

— 190°,4	— 87°,4	24,36	1,181	0,0485	} media: 0,0492
— 190,6	— 88,2	"	1,213	0,0498	
— 191,1	— 88,4	"	1,201	0,0493	
0	— 75,3	"	1,340	0,0550	} media: 0,0541
0	— 75,6	"	1,301	0,0534	
0	— 76,1	"	1,313	0,0539	

LEGA [III].

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 189°,9	— 89°,2	28,1	1,259	0,0448	} media: 0,0463
— 188,7	— 88,7	"	1,323	0,0471	
— 190,3	— 88,1	"	1,320	0,0470	
0	— 77,1	"	1,394	0,0496	} media: 0,0501
0	— 76,8	"	1,441	0,0513	
0	— 77,3	"	1,388	0,0494	

Per i metalli puri che servirono per preparare le leghe, si ebbero, in buon accordo con quelli di Richards e Jakson ⁽¹⁾, i seguenti valori:

Antimonio.

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 188°,7	— 84°,5	23,25	1,023	0,0440	} media: 0,0446
— 189,1	— 85,0	"	1,048	0,0451	
— 190,5	— 88,4	"	1,039	0,0447	
0	— 76,4	"	1,128	0,0485	} media: 0,0480
0	— 75,9	"	1,097	0,0472	
0	— 76,6	"	1,123	0,0483	

(¹) Zeit. für phys. Chemie, 70, 414 (1910).

Arsenico (cristallino).

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 190°,6	— 84°,6	22,42	1,569	0,0700	} media: 0,0701
— 191,2	— 83,9	"	1,589	0,0709	
— 188,1	— 85,2	"	1,586	0,0694	
0	— 75,1	"	1,699	0,0758	} media: 0,0756
0	— 75,9	"	1,675	0,0747	
0	— 74,3	"	1,711	0,0763	

Col calorimetro a toluolo, tipo Fabre e Silbermann, descritto da Schottky (¹), fra le temperature di 25°,0 [\pm 0,1] e 0°, ebbi i seguenti risultati (valori medi):

	g	E	Cal. spec.
Lega [I]	14,32	0,825	0,0576
Lega [II]	16,17	0,900	0,0557
Lega [III]	15,43	0,805	0,0522
Antimonio	18,1	0,898	0,0496
Arsenico	19,41	1,578	0,0813

Quando con C_{sp} si indichi il calore specifico della lega; con g_1, g_2 il peso dei componenti; e con c_1, c_2 i loro calori specifici; con la formola

$$C_{sp} = \frac{c_1 g_1 + c_2 g_2}{g_1 + g_2}$$

si calcola:

	Temperatura assoluta media	Cal. specifico
Lega [I]	137	0,0514
	234	0,0538
	285	0,0561
Lega [II]	137	0,0489
	134	0,0526
	285	0,0549
Lega [III]	137	0,0460
	234	0,0495
	285	0,0514

Se ora ammettiamo la relazione

$$(1) \quad \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\theta'}{T_1}}$$

(¹) Phys. Zeit., X (1909), 634.

dove ν' è la frequenza atomica dell'arsenico nella lega di punto di fusione assoluto θ' , e ν ne è la frequenza atomica allo stato puro, in cui fonde a T_1 gradi (assoluti), possiamo, coi dati sperimentali, ricavare T_1 .

Si ha

$$C_{as} = \frac{C_{sp}(g_1 + g_2) - g_1 C_{sb}}{g_2},$$

dove con C_{as} , C_{sb} si indica il calore specifico dell'arsenico e dall'antimonio nella lega, e con C_{sp} il calore specifico, sempre a pressione costante, della lega.

Senonchè, il calore specifico dell'antimonio, nelle leghe considerate, è praticamente eguale a quello dell'antimonio puro, perchè il punto di fusione del metallo e delle leghe differisce assai poco. Allora, moltiplicando C_{as} per il peso atomico dell'arsenico, si ha il calore atomico C dell'arsenico, e, da questo, il valore di ν' con l'equazione

$$C = \frac{3}{2} R \left[\frac{\left(\frac{\beta \nu'}{T} \right)^2 e^{\frac{\beta \nu'}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta \nu'}{T}} - 1 \right)^2} + \frac{\left(\frac{\beta \nu'}{2T} \right)^2 e^{\left(\frac{\beta \nu'}{2T} \right)}}{\left(e^{\frac{\beta \nu'}{2T}} - 1 \right)^2} \right],$$

quando si supponga che il calore specifico a pressione costante non differisca apprezzabilmente da quello a volume costante. Questo fatto si verifica con migliore approssimazione a temperatura bassa. Dal calore specifico del metallo puro, alla stessa temperatura, si calcola ν : e così, nella (1), è tutto noto, meno che T_1 .

Per la lega [I], alla temperatura assoluta media di 137 gradi, si calcola

$$T_1 = 1250;$$

e per la lega [II], alla stessa temperatura,

$$T_1 = 1154.$$

Come media, dunque, $T_1 = 1202$. Il valore così calcolato non differisce molto da quelli trovati da Goubau e Jolibois, e, data l'approssimazione delle ipotesi accettate, il risultato presenta un notevole interesse. Tanto più che anche le considerazioni di Biltz ⁽¹⁾, sopra la classificazione degli elementi in base alla variazione periodica delle frequenze atomiche, sembrano confermarlo.

⁽¹⁾ Zeit. für Elektr., XVII (1911), 670.

Fisica. — *Sull'esperienza di Clément e Desormes e sulla determinazione dell'equivalente meccanico della caloria.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

Il calcolo dell'esperienza di Clément e Desormes, viene di solito eseguito in modo indiretto e piuttosto illogico, poichè viene basato sulla legge di Poisson (o Laplace) sulla variazione adiabatica di pressione dei gaz, la quale a sua volta viene dedotta dal 1° principio di Termodinamica e cesserebbe d'esser vera se questo non lo fosse.

Quindi il valore che si ottiene pel rapporto dei calori specifici dell'aria a pressione o a volume costante, pare vero solo se si ammette l'esattezza di esso principio, e la celebre dimostrazione che di questo diede Roberto Mayer pare fondata sopra una petizione di principio.

Invece è possibile dedurre dall'esperienza di Clément e Desormes il suddetto rapporto senza far uso nè della legge di Poisson, nè del 1° principio di Termodinamica, ma bensì direttamente con calcolo e ragionamento così semplice e diretto, che forse è quello stesso che era nell'intenzione degli autori, reso oscuro dalle idee, dalle tendenze e dalla fraseologia di quel tempo.

Sebbene l'esperienza ed il modo solito di calcolarla siano ben noti, credo necessario ripeterli, per maggior chiarezza, per confronto, ed anche perchè occorreranno in seguito i dati relativi.

1°) Si ha un grosso pallone con aria, che nella prima fase dell'esperienza ha la pressione, il volume e la temperatura assoluta indicati da p_1 , v_1 , T_1 . La pressione p_1 è un po' minore di quella esterna p e sarà dunque $p_1 = p - h$, essendo h piccolo e dato da un apposito manometro; la temperatura sia la stessa di quella ambiente T contraddistinta coll'indice 1 solo per omogeneità d'indicazioni.

2°) Si apre e si richiude rapidamente il grosso rubinetto di cui è munito il pallone; l'aria esterna vi penetra stabilendo l'uguaglianza di pressione coll'esterno, e l'aria del pallone si riscalda un poco per effetto di questa compressione. Alla fine di questa seconda fase dell'esperienza, cioè appena richiuso completamente il rubinetto, la pressione il volume e la temperatura siano p_2 , v_2 , T_2 essendo da notare che $p_2 = p$ pressione esterna e che $T_2 = T + \delta T$.

3°) Lasciando il pallone a sè, e supponendo invariate la pressione e la temperatura esterna, il calore prodotto dalla compressione si disperde e l'aria del pallone ritorna alla temperatura ambiente, mentre la pressione decresce perchè il volume è costante.

Indicando con p_3, v_3, T_3 le condizioni dell'aria del pallone alla fine di questa 3^a fase, sarà $p_3 = p - h'$, essendo h' dato dal manometro. $v_3 = v_2$ e $T_3 = T$.

Il passaggio dalla 1^a alla 2^a fase è rapidissimo quindi adiabatico. e per esso vale la legge di Poisson:

$$(1) \quad p_1 v_1^k = p_2 v_2^k,$$

essendo k il rapporto cercato dei calori specifici.

Inoltre nella 1^a e nella 3^a fase, la temperatura è la stessa, quella dell'ambiente, quindi vale la legge di Boyle:

$$(2) \quad p_1 v_1 = p_3 v_3, \text{ ossia } p_1^k v_1^k = p_3^k v_3^k.$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze (1) e (2), ed osservando che $v_2 = v_3$ si ha:

$$p_1^{k-1} = p_3^k / p_2, \quad (k-1) \log p_1 = k \log p_3 - \log p_2$$

$$k = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log p_1 - \log p_3} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_3} = \frac{h}{h - h'}.$$

Van der Waals (Lehrbuch der Thermodynamik Bd. I) fa notare che nella dimostrazione della legge di Poisson deve essersi introdotto il 1° principio di Termodinamica che essa legge presuppone. Questa dimostrazione riferita dal Gehler (*Physikalisches Wörterbuch*) e dal Mach (*Die Wärme*) mi riesce poco chiara (direi anzi poco persuasiva) e non vi trovo traccia del suddetto principio.

Forse Poisson ha cercato d'ottenere con un procedimento (o con un artificio) analitico una legge della compressibilità adiabatica dell'aria, tale da metter d'accordo i valori sperimentali della velocità del suono nell'aria colla formula di Newton, dimodochè in fondo la legge di Poisson sarebbe basata sull'esperienza e solo perciò d'accordo col 1° principio di Termodinamica mentre questo non era conosciuto.

Ecco ora come si può ottenere il suddetto valore di k , senza far uso della legge di Poisson, nel modo che deriva naturalmente dall'esperienza stessa.

Ai tempi di Clément e Desormes, in seguito alla costruzione e diffusione dell'acciarino pneumatico, era ben noto che l'aria si riscalda per effetto d'una compressione e si raffredda per effetto d'una rarefazione,

Senza tener conto della causa, allora sconosciuta, di queste variazioni di temperatura era dunque, anche allora, chiaro che per riscaldare di 1° un chilogramma d'aria, lasciando che si dilati a pressione costante, si richiede maggior quantità di calore che per riscaldarla di 1°, in vaso chiuso a vo-

lume costante, perchè nel 1° caso occorre compensare il raffreddamento prodotto dalla dilatazione suddetta.

Se si misura la diminuzione di temperatura prodotta nell'aria da una uguale dilatazione, avremo di quanto meno di 1° si riscalda 1 kgr. d'aria a pressione costante quando riceva la quantità di calore che la riscalderebbe di 1° a volume costante, e si potrà agevolmente dedurne il rapporto dei due calori specifici.

Il semplice calcolo può esser condotto nel modo seguente:

1°) Si abbia in un recipiente impermeabile al calore 1 kgr. d'aria, e siano p, v, T , le sue condizioni; lo si riscaldi di 1° a volume costante, ciò richiederà una quantità di calore c_v e farà aumentare la pressione di $p(1/T)$.

2°) Lo si lasci dilatare adiabaticamente finchè la sua pressione è ritornata quella iniziale (p. es. la pressione esterna), esso si raffredderà, per effetto di questa dilatazione, di $\delta_1 T$ incognito, il suo volume crescerà e diverrà $v' = v(T + 1 - \delta_1 T) T$ [poichè essendo p costante si ha $v/T = v'/(T + 1 - \delta_1 T)$] pure incognito ma che non occorre determinare.

3°) Si può ottenere lo stesso risultato, cioè di far passare l'aria dallo stato p_1, v_1, T allo stato $p, v', T + 1° - \delta_1 T$ (essendo v' determinato dai valori della pressione e della temperatura) riscaldando l'aria di 1° — $\delta_1 T$ a pressione costante ciò che richiederebbe una quantità di calore $c_p(1° - \delta_1 T)$.

Siccome non è concepibile che l'aria in condizioni uguali possieda diverse quantità di calore, quelle che in definitiva avrà guadagnato l'aria nel passare dalle condizioni iniziali alle finali, nei due casi saranno uguali e sarà:

$$(3) \quad c_v \cdot 1° = c_p(1 - \delta_1 T) \quad k = c_p/c_v = 1/(1 - \delta_1 T).$$

Se invece si riscalda 1 kgr. d'aria di 1° a pressione costante, ciò che richiederà una quantità di calore c_p e farà aumentare il volume di $(1/T)v$, e poi la si comprime adiabaticamente fino al volume iniziale, essa per effetto di questa compressione si riscalderà di $\delta_2 T$, la sua temperatura sarà dunque cresciuta a partire dallo stato iniziale, di 1° + $\delta_2 T$ e la sua pressione sarà divenuta $p' = p + p(1 + \delta_2 T)/T$ pure incognita, ma che non occorre conoscere.

Lo stesso risultato, cioè d'aver fatto passare 1 kgr. d'aria da T a $T + 1 + \delta_2 T$ a volume costante ed alla pressione corrispondente, si può ottenere riscaldando direttamente 1 kgr. d'aria di 1° + $\delta_2 T$ a volume costante, ciò che richiederà una quantità di calore $c_v(1 + \delta_2 T)$, e poichè le quantità di calore ricevute dall'aria nei due casi devono essere uguali, sarà:

$$(4) \quad c_p \cdot 1° = c_v(1 + \delta_2 T) \quad k = c_p/c_v = 1 + \delta_2 T.$$

Le stesse relazioni si ottengono procedendo per raffreddamento, cioè uguagliando la quantità di calore che in definitiva perde 1 kgr. d'aria che viene raffreddato di 1° a volume costante, e poi compresso fino alla pressione iniziale con quella che perderebbe la stessa aria se fosse raffreddata d'altrettanto, $(1 + \delta_1 T)$, a pressione costante, oppure uguagliando la quantità di calore che essa perde quando venga raffreddata di 1° a pressione costante e poi ridotta al volume iniziale, con quella che perderebbe se fosse raffreddata d'altrettanto $(1 + \delta_2 T)$ a volume costante.

Il valore di k sarà dunque noto se si determina sperimentalmente di quanto si riscalda o raffredda l'aria che subisce una determinata variazione istantanea di pressione, oppure di volume.

Questa determinazione evidentemente non potrebbe esser fatta con un termometro a mercurio; esso tarda troppo a mettersi in equilibrio di temperatura coll'aria, mentre invece la temperatura che si vuol misurare varia rapidamente; inoltre la sua massa è troppo grande.

Maggiore probabilità di un buon risultato in questa misura s'avrebbe usando uno speciale bolometro, di massa piccolissima, di gran superficie estesa per tutto il volume dell'aria, dimodochè della temperatura, certo non uniforme, di questa si potesse avere molto rapidamente (e con opportune correzioni per il calore ceduto nel brevissimo tempo alle pareti) il valore medio.

Clément e Desormes hanno evitato le suddette difficoltà: 1° usando come termometro la stessa aria che viene dilatata o compressa; 2° evitando di misurare direttamente la temperatura prodottasi e rapidamente variabile, e misurando invece di quanto ne differisce la temperatura ambiente. Mi pare anche molto opportuna la compressione dell'aria effettuata senza ricorrere a uno stantuffo, il quale produce calore per attrito e ne sottrae per conduzione e forse anche nel meccanismo stesso della compressione. 3° Evitando di misurare direttamente la temperatura prodottasi e molto rapidamente variabile, e misurando invece di quanto ne differisce la temperatura ambiente.

La pressione h' osservata nel manometro, nella 3^a fase dell'esperienza, misura dunque la variazione di temperatura prodotta dalla rapida variazione di pressione. Poichè la variazione di temperatura di 1° fa variare la pressione di $(1/T)p$, la variazione di pressione h' corrisponderà ad una variazione di temperatura $h' T/p$. Lo stesso risultato s'ottiene osservando che nella 2^a e 3^a fase dell'esperienza il volume dell'aria è lo stesso, quindi:

$$p_2/p_3 = T_2/T_3, \text{ ossia } p/(p - h') = (T + \delta T)/T,$$

quindi, con molta approssimazione trascurando h' rispetto a p si ha:

$$\delta T = h' T/p.$$

La variazione di temperatura δT è stata prodotta nell'esperienza da una variazione di pressione h qualsiasi, ma nella formula (3), $\delta_1 T$ si riferisce

ad una variazione di pressione $(1/T)p$, dunque in questo caso $h = p/T$, quindi $\delta_1 T = h'/h$.

Quindi la formula (3) dà:

$$k = c_p/c_v = 1/(1 - h'/h) = h/(h - h')$$

come si ottiene facendo uso della legge di Poisson.

È possibile variare l'esperienza di Clément e Desormes in modo da ricavarne direttamente il riscaldamento prodotto nell'aria da una determinata diminuzione di volume $\delta v = (1/T)v$; ma non mi pare che ciò rechi nessun utile, perchè l'esperienza riuscirebbe più complicata e darebbe probabilmente valori meno esatti, ed inoltre questo riscaldamento $\delta_2 T$ può esser dedotto, con un calcolo molto breve, dall'esperienza solita.

Difatti il riscaldamento $\delta_1 T = h'/h$ è ottenuto mediante un aumento di pressione p/T , mentre il riscaldamento $\delta_2 T$ s'otterrebbe, come s'è visto, mediante un aumento di pressione $p(1 + \delta_2 T)/T$, quindi per la proporzionalità fra le piccole variazioni di pressione e di temperatura s'avrà:

$$\frac{\delta_2 T}{p(1 + \delta_2 T)/T} = \frac{\delta_1 T}{p/T} = \frac{h'/h}{p/T}, \quad \delta_2 T = \frac{h'}{h - h'}.$$

Sostituendo questo valore di $\delta_2 T$ nella (4) si ottiene:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{h'}{h - h'} = \frac{h}{h - h'}$$

come s'era trovato colla formula (3).

I valori ottenuti per $\delta_1 T$ e $\delta_2 T$, cioè h'/h ed $h'/(h - h')$ si riferiscono alle variazioni di pressione o di volume $(1/T)p$, $(1/T)v$ rispettivamente; se invece queste fossero qualsiasi, purchè molto piccole e vengono indicate con δp , δv , le corrispondenti variazioni di temperatura saranno ad esse proporzionali, ed indicandole ancora con $\delta_1 T$, $\delta_2 T$ sarà:

$$\frac{\delta_1 T}{\delta p} = \frac{h' \cdot h}{p/T}, \quad \frac{\delta_2 T}{\delta v} = \frac{h' (h - h')}{v/T},$$

cioè:

$$(5) \quad \delta_1 T = \frac{h'}{h} \frac{T}{p} \delta p \quad (6) \quad \delta_2 T = \frac{h'}{h - h'} \frac{v}{T} \delta v.$$

dove h'/h ed $h'/(h - h')$ sono due costanti numeriche ottenibili coll'esperienza per un valore particolare qualsiasi di δp o di δv , uguali approssimativamente (per l'aria) a 0,29 e 0,4, ed esprimibili anche come s'è visto da:

$$\frac{h'}{h} = \frac{c_p - c_v}{c_p}, \quad \frac{h'}{h - h'} = \frac{c_p - c_v}{c_v}$$

Per $\delta p = (1/T)p$ oppure $\delta v = (1/T)v$, le formule (5) e (6) danno $\delta_1 T = h'/h$, $\delta_2 T = h'/(h - h')$, e per $\delta p = h$ sarebbe $\delta_1 T = h' \cdot T/p$ come s'era già trovato.

Rimane così dimostrato che sebbene nell'esperienza di Clément e Desormes la variazione adiabatica dalla 1^a alla 2^a fase sia indispensabile per ottenere il rapporto k dei due suddetti calori specifici dell'aria, tuttavia non è necessario conoscere le leggi di questa variazione (se essa è sufficientemente piccola), e basta la conoscenza della variazione di temperatura che essa ha prodotto e che è data direttamente dall'esperienza.

È chiaro che il semplice apparecchio di Clément e Desormes può servire utilmente: 1° per mostrare la trasformazione del lavoro in calore producendo la solita rapida compressione, accompagnata da riscaldamento, dell'aria del pallone; 2° per la trasformazione inversa di calore in lavoro producendo invece nell'aria del pallone una rapida dilatazione accompagnata da raffreddamento cioè da consumo di calore; 3° per dedurre da queste esperienze l'equivalente meccanico della caloria, calcolando il lavoro impiegato oppure ottenuto, ed il calore che è stato prodotto o consumato, in modo essenzialmente uguale, ma praticamente più semplice, d'una celebre esperienza di Joule.

Si eseguisca nel modo solito l'esperienza di Clément e Desormes, e siano $p - h$, v , T le condizioni iniziali dell'aria del pallone, e p , v' , $T + \delta_1 T$ quelle subito dopo aperto e chiuso il rubinetto $p - h'$, v' , T quelle finali.

Il lavoro fatto dalla pressione atmosferica nel comprimer l'aria del pallone sarà $p(v - v')$, e siccome la legge di Boyle per la 1^a e 3^a fase dà: $(p - h)v = (p - h')v'$, si avrà per esso lavoro con molta approssimazione $p(v - v') = v(h - h')$ (cioè $p dv = -v dp$) che è molto facilmente calcolabile in chilogrammetri, avvertendo che la pressione dovrà essere espressa in chilogrammi per cm² ed il volume in metri cubi.

Il calore prodotto da questo lavoro sarà $P \cdot c_v \delta_1 T$, se $P = vD$ è il peso dell'aria del pallone e D la sua densità. Siccome l'aumento di temperatura $\delta_1 T$ è uguale ad $h'T/p$, ed il calore specifico c_v a $(h - h')c_p/h$ esso calore sarà:

$$P c_v \delta_1 T = \frac{(h - h')/h'}{h p} c_p \cdot T \cdot P$$

che potrà anch'esso essere calcolato numericamente; dividendo il suddetto lavoro per questo calore s'avrà l'equivalente meccanico cercato.

Non sostituendo i valori numerici, ed indicando con E l'equivalente meccanico della caloria, s'avrà:

$$p(v - v') = v(h - h') = vD \frac{(h - h')/h'}{h p} c_p T \cdot E,$$

ossia poichè $h'/h = (c_p - c_v)/c_p$, rimarrà la nota relazione:

$$E = \frac{p}{D(c_p - c_v) T}.$$

Fisica. — *La durata minima di un suono sufficiente per individuarlo.* Nota del dott. G. GIANFRANCESCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Nello studio analitico di suoni importa molto sapere quale sia la durata del periodo più lungo che in essi si verifica, per essere sicuri di tener conto nell'analisi di tutti i suoni componenti. Poichè spesso il periodo più lungo non è quello che corrisponde alla nota fondamentale in cui il suono è stato prodotto: il suono può essere accompagnato per es. da rumori molto bassi, i quali hanno ancora grande importanza nel timbro, oppure può comprendere note superiori il cui numero di vibrazioni non sia un multiplo intero delle vibrazioni del fondamentale.

Quando si possiede un tratto abbastanza lungo della curva sonora scritta si può sempre riconoscere qual'è il periodo più lungo; ma quando non si abbia a propria disposizione che qualche vibrazione scritta, importa molto sapere se quel piccolo tratto di curva sia capace di individuare completamente il suono che si vuole studiare.

Un problema analogo a questo è quello di determinare il numero minimo di vibrazioni necessario per riconoscere un suono. Questo problema non è nuovo. Già il Savart nel 1830 si era occupato della questione, e dopo lui se ne occuparono Villari e Marangoni, l'Exner, Cross e Maltby, ed il Meyer. I risultati non sono concordanti; secondo alcuni si richiede un buon numero di vibrazioni, secondo altri basta anche una sola, anzi anche una frazione di vibrazione. Il Nagel conclude, dalla critica de' vari sperimentatori, che ordinariamente bastano due vibrazioni di un suono ascoltato per riconoscerlo completamente.

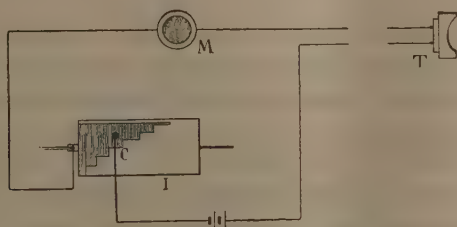
Nel mio studio sulle vocali mi importava conoscere questo numero minimo per giudicare sulla sufficienza di un piccolo numero di vibrazioni scritte.

Adoperavo l'interruttore differenziale del Blaserna. Questo, come è noto, consiste in un cilindro ruotante *I* la cui superficie laterale è in parte metallica, ad ampiezza variabile a scaglioni. Il circuito elettrico si chiude dal perno su cui gira il cilindro, alla superficie metallica sulla quale si appoggia un leggero contatto a molla *C*, che si può spostare parallelamente ad una generatrice del cilindro. Il circuito include un microfono *M* dinanzi al quale si produce il suono voluto e, a lunga distanza, un telefono.

Davanti al microfono si produce con continuità per un certo tempo il suono. In un'altra camera è posto il telefono. Si mette in rotazione il cilindro interruttore e si sposta il contatto mobile *C* verso le durate minori di contatto fino a che al telefono è possibile riconoscere il suono. La velocità di

rotazione del cilindro si può conoscere determinando la nota che si ottiene soffiando attraverso un disco forato che gira con quello. La frazione di giro che costituisce la durata del contatto si legge direttamente sul cilindro. Così si può calcolare la frazione di secondo che rappresenta la durata minima necessaria per riconoscere il suono.

Il contatto strisciante turba leggermente il suono, ma non impedisce di riconoscerlo; anzi quando avanti al microfono si produce un suono, il rumore dovuto allo strisciamento diminuisce sensibilmente. Si può anche evitarlo in parte, facendo in modo che l'interruttore differenziale chiuda un circuito secondario, il quale includa un relais che a sua volta chiuda il circuito principale.



Ecco i risultati di alcune esperienze. La durata minima percettibile è rappresentata con τ in frazione di secondo.

Suoni	Altezza	Valore di τ	Numero corrispondente di vibrazioni
Canna d'organo	Re ₂	$\frac{1}{36}$	circa 4
"	La ₂	$\frac{1}{42}$	" 5
Fischio	La ₄	$\frac{1}{40}$	" 22
"	La ₅	$\frac{1}{40}$	" 43
Corista	La ₃	$\frac{1}{108}$	" 4
Vocali varie . .	Do ₂	$\frac{1}{108}$	" 2

Da questa tabella si può osservare che non esiste un numero minimo di vibrazioni costante per i vari suoni; apparisce piuttosto costante la durata minima del suono. Fanno eccezione il corista normale e le vocali.

Queste osservazioni permettono le seguenti:

CONCLUSIONI.

La durata minima di un suono necessaria per riconoscerlo è una costante per i vari suoni se si calcola come tempo, non come numero di vibrazioni.

Tale durata costituisce una costante fisiologica, e può rappresentare il tempo minimo necessario all'organo dell'udito per adattarsi al suono che è prodotto esternamente. Questa costante è circa $\frac{1}{40}$ di secondo. Graficamente è certo sufficiente una sola vibrazione completa per riconoscere il suono, intendendo per vibrazione completa quella che corrisponde al più lungo periodo.

Per alcuni suoni, per i quali l'orecchio dello sperimentatore è più esercitato, la durata minima può diminuire sensibilmente. Questo potrebbe essere giustificato dal fatto che nel caso mio ho potuto percepire il suono del corista normale e quello delle vocali in $\frac{1}{108}$ di secondo. Ora a questi due suoni io sono in modo speciale abituato, perchè da quattro anni mi occupo dello studio del corista campione, e da due anni delle vocali. Di più, ripetuta l'esperienza con altro sperimentatore si richiedeva un tempo maggiore, e dell'ordine di quello richiesto per gli altri suoni.

Bisogna osservare che col metodo da me adoperato il suono si riproduce più volte e a piccoli intervalli. La velocità con cui girava il cilindro era generalmente di cinque o sei giri al secondo, ed a ogni giro il suono si riproduceva. Questa ripetizione facilita naturalmente l'adattamento dell'orecchio alla percezione del suono. Quando dunque il suono venisse prodotto per una sola volta si richiederebbe probabilmente un tempo maggiore di durata.

Per ciò che riguarda la questione particolare delle vocali si può concludere che niente di più si richiede per il riconoscimento, di quello che basta per gli altri suoni. Se dunque acusticamente due o tre vibrazioni bastano per individuare una vocale, nell'analisi non v'è ragione di richiedere un numero maggiore di onde scritte.

Chimica. — *Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di sodio* ⁽¹⁾. Nota I di M. AMADORI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In alcuni lavori precedenti ho studiato termicamente alcune coppie di sali i cui costituenti erano i solfati, cromati, molibdati e wolframati di sodio e di potassio.

In questi lavori venivano presi in considerazione non solo i fenomeni di solidificazione dei sali e delle miscele, ma nelle masse solide venivano anche seguite le varie modificazioni che avvengono in seguito a trasformazioni dei componenti: tutti questi sali infatti esistono per lo meno in due modificazioni.

Nei Rendiconti di questa Accademia furono pubblicate le ricerche che riguardano le coppie tra solfato, cromato, molibdato e wolframato di potassio ⁽²⁾, quelle dei solfati di sodio e di potassio con i relativi carbonati ⁽³⁾ e nitrati ⁽⁴⁾. Altre ricerche furono pubblicate negli Atti del R. Istituto Veneto, e cioè quelle sulle miscele del molibdato e del wolframato di potassio con le corrispondenti anidridi ⁽⁵⁾, e quelle tra cromati, molibdati e wolframati di sodio e di potassio ⁽⁶⁾. In tutte queste ricerche le determinazioni dei singoli punti furono sempre fatte seguendo le curve di raffreddamento, come è uso costante di tutti gli sperimentatori in questo campo.

In un recente lavoro van Klooster ⁽⁷⁾ ha voluto studiare il grado di esattezza che si può raggiungere nello studio termico seguendo di confronto il riscaldamento ed il raffreddamento della massa. Come materiale di esperienza egli ha scelto appunto i solfati, molibdati e wolframati di sodio e di potassio studiandone la solidificazione, la fusione e le loro trasformazioni.

I dati di van Klooster sui solfati di sodio e di potassio ottenuti nel raffreddamento e riscaldamento concordano con i miei e con quelli di precedenti autori, salvo le usuali piccole diversità nei valori assoluti di temperatura.

Dei corrispondenti cromati van Klooster non si è occupato.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

⁽²⁾ Questi Rendiconti, XXII, I, 453. 609 (1913).

⁽³⁾ Questi Rendiconti, XXI, II, 65 (1912).

⁽⁴⁾ Questi Rendiconti, XXII, II, 332 (1913).

⁽⁵⁾ Atti R. Istituto Veneto, LXXII, II, 893 (1912-13),

⁽⁶⁾ Atti R. Istituto Veneto, LXXII, II, 903 (1912-13).

⁽⁷⁾ Zeit. f. anorg. Chemie, 85, 49 (1914).

Dal complesso delle ricerche finora compiute dai varî autori è indubbio il dimorfismo di entrambi i solfati e cromati di sodio e di potassio: ho ritenuto perciò inutile occuparmi ulteriormente di questi sali.

Interessante e necessario da parte mia si presentava invece il proseguire lo studio dei molibdati e dei wolframati di sodio e di potassio: infatti i risultati ottenuti da van Klooster non sono sempre in accordo con i miei: per il molibdato e per il wolframato di potassio egli trova i miei dati in qualche punto errati, in qualche altro manchevoli: i miei dati sul molibdato e sul wolframato di sodio non erano a conoscenza di quell'autore: le diversità per questi sali non sono rilevanti, ma meritano qualche ulteriore osservazione.

Ho voluto perciò ripetere esperienze in proposito seguendo il riscaldamento e il raffreddamento dei sali, e completare queste ricerche con altre per escludere ogni dubbio sulla natura di certi fenomeni osservati.

In tutte queste esperienze i sali vennero riscaldati entro crogiolo di platino: nel centro della massa veniva immerso direttamente una pila termoelettrica di PtPtRd dello spessore di 0,5 millimetri: le temperature venivano lette direttamente su galvanometro Siemens ed Halske: la pila ed il galvanometro vennero graduate prendendo come punti fissi le temperature di solidificazione del piombo (326°), dell'antimonio (630°) e dell'argento (961°). Le letture venivano fatte di 10" in 10".

Il riscaldamento e il raffreddamento venivano fatti in forno a resistenza di filo di nichel e cromo, e venivano regolati mediante un insieme di resistenze in modo da avere ogni 10" un aumento o una diminuzione di temperatura variabili da 1° a 2°-3°.

Le quantità di sale adoperate erano di 15-20 grammi.

Molibdato sodico. — Il molibdato sodico è tetramorfo. Con il metodo del raffreddamento sono stati osservati dai varî autori i seguenti punti di solidificazione e di trasformazione:

	Punto solidif.	Trasform. 1 ^a	Trasform. 2 ^a	Trasform. 3 ^a
Hüttner e Tammann (1)	692°	620°-605°	—	410°-380°
Boeke (2)	692	619	587°	431
Groschuff (3)	686	609	575	408
Amadori (loc. cit.) . .	688	614	574	405
Van Klooster (loc. cit.)	685	626	580	397

Il sale adoperato in queste, come nelle precedenti ricerche, fu il molibdato sodico Kahlbaum che venne disidratato mediante riscaldamento.

Anche in queste ricerche il punto di solidificazione risultò a 688°. I due primi punti di trasformazione risultarono a 616° e 580°. Il terzo punto

(1) Zeit. f. anorg. Chemie, 43, 215 (1905).

(2) Zeit. f. anorg. Chemie, 50, 355 (1906).

(3) Zeit. f. anorg. Chemie, 58, 113 (1908).

di trasformazione fu trovato a 410° ; la trasformazione avviene con notevole sviluppo di calore.

Van Klooster seguendo il riscaldamento del molibdato sodico ottenne trasformazioni a temperature superiori a quelle avute nel raffreddamento e date nella tabella, e cioè le temperature di trasformazione osservate furono: 640° , 592° , 445° .

Anche le mie ricerche fatte riscaldando il sale condussero a temperature di trasformazioni superiori a quelle avute nel raffreddamento. La I e la II trasformazione risultarono a temperature di $10-15^{\circ}$ superiori a quelle osservate nel raffreddamento, e cioè a 634° e a 592° : l'altra trasformazione risultò a 444° , e cioè a una temperatura di 34° superiore a quella avuta nel raffreddamento.

È noto per le ricerche di Boeke⁽¹⁾ quale influenza su quest'ultima trasformazione possa avere la presenza di piccole quantità di certi sali, e come ad esempio la presenza di 1 % di solfato abbassi circa 200° quella temperatura di trasformazione.

A questo proposito farò notare che in alcune esperienze ho agito con un molibdato sodico, il quale, mentre mostrava lo stesso punto di solidificazione e gli stessi punti di trasformazione I e II subiva la III trasformazione con arresto considerevole a 254° . Il sale mostrò all'analisi che conteneva piccole quantità di solfato al quale probabilmente era dovuta la bassa temperatura di trasformazione.

È però da notare che, raffreddato il sale, questo per successivo riscaldamento non dava il punto di trasformazione a 254° , ma a 444° : ciò avveniva non solo se nel raffreddamento si portava il sale a temperatura ordinaria, ma anche se oltrepassata di poco la trasformazione, per es. fino a 220° , subito lo si riscaldava. Se al contrario il sale veniva raffreddato solo fino ad una temperatura superiore anche lievemente a quella cui la trasformazione avviene, per es. fino a 270 , per successivo riscaldamento a 444° non si manifestava alcun effetto termico.

Wolframato sodico. — I punti di solidificazione e di trasformazione di questo sale trovati con il raffreddamento delle masse fuse sono i seguenti:

	Punto di solidificaz. ⁽¹⁾	Trasform. 1 ^a	Trasform. 2 ^a
Hüttner e Tammann (loc. cit.)	698° , 690° (?)	—	570°
Boeke (loc. cit.)	698	588°	564
Parravano ⁽²⁾	698	585	568
Van Klooster ⁽³⁾	700	589	572
Amadori (loc. cit.)	694	576	560
Van Klooster (loc. cit.)	694	587	570

⁽¹⁾ Zeit. f. anorg. Chemie, 50, 355 (1906); Zeit. f. phys. Chemie, 56, 686 (1906).

⁽²⁾ Gazz. Chim. ital., 39, b, 55 (1909).

⁽³⁾ Zeit. f. anorg. Chemie, 69, 135 (1910).

Van Klooster come in precedenti ricerche anche in queste ultime trovò, con il metodo del raffreddamento, che si hanno due effetti termici notevoli a 587° e a 570° , i quali dovrebbero corrispondere a due trasformazioni del wolframato sodico. Riscaldando però la massa salina non riebbe i due arresti osservati nel raffreddamento, ma un solo arresto, il superiore, a 587° .

In queste mie ricerche compiute come le precedenti su wolframato sodico Kahlbaum, la temperatura di solidificazione risultò a 696° , e alquanto superiori a quelle avute precedentemente furono le due temperature di trasformazioni, cioè 582° e 571° ; quest'ultima con effetto termico di molto superiore alla precedente. Riscaldando la massa ebbi un solo arresto a 580° - 584° di durata considerevole.

Dalla comparsa di questa unica variazione termica che si osserva nel riscaldamento van Klooster deduce che solo una trasformazione ha realmente luogo per il wolframato sodico a 587° .

A questo proposito van Klooster compì alcune esperienze.

Raffreddata la massa a 586° , un grado sotto la temperatura del primo effetto termico, e mantenuta a questa temperatura per circa mezz'ora, per raffreddamento successivo riottenne l'arresto a 570° .

Riscaldata la massa a 583° , e mantenuta a questa temperatura per 15 minuti, per successivo raffreddamento riottenne l'arresto a 570° .

Queste esperienze mi sembra confermino l'esistenza di due trasformazioni. Infatti la prima esperienza mostra che mantenendo la massa a 586° non si completa la trasformazione iniziata a 587° , poichè per raffreddamento si ha un nuovo effetto termico a 570° : la trasformazione che avviene a 587° quindi è diversa da quella che avviene a 570° . La seconda esperienza mostra che riscaldando la massa a 583° avviene una trasformazione; infatti per raffreddamento si ha l'effetto termico a 570° : non è perciò necessario raggiungere la temperatura di 587° perchè avvenga una trasformazione.

La doppia trasformazione che avverrebbe a queste temperature è confermata dalle ricerche ottiche compiute da Boeke. Egli osservò che i cristalli di wolframato sodico, i quali al di sopra di 600° sono doppio rifrangenti, poco al di sotto di 600° assumono una forte doppia rifrangenza e cambiano colore; a una temperatura un po' inferiore diventano rapidamente isotropi. Gli stessi fenomeni si ripetono inversamente per lento riscaldamento dei cristalli.

Le ricerche di Boeke hanno inoltre mostrato che le due trasformazioni del wolframato di sodio a 588° e a 564° sono della stessa natura di quelle del molibdato di sodio a 587° e a 431° ; cosicchè per le miscele dei due sali si hanno due curve continue distinte di trasformazione che congiungono i due punti di trasformazione del wolframato con quelli del molibdato.

Anche nelle mie ricerche sulla coppia wolframato di sodio e wolframato di potassio si notarono due curve di trasformazione distinte che si staccano dai due punti di trasformazione del wolframato sodico osservati.

Questo complesso di ricerche confermano che il doppio effetto termico osservato nel raffreddamento della massa, è dovuto a una doppia trasformazione del sale.

In altra Nota verrà trattato dei fenomeni di trasformazione nei corrispondenti sali di potassio.

Mineralogia. — *Sulla vera natura della miersite e della cuprojodargirite* ⁽¹⁾. Nota II di E. QUERCIGH, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Riassunti sommariamente, nella precedente Nota ⁽²⁾, lo stato attuale del problema ed i risultati ottenuti coll'analisi termica del sistema $\text{AgI} + \text{CuI}$, che escludono la formazione, in quelle condizioni, del composto $4\text{AgI} \cdot \text{CuI}$, corrispondente alla miersite di Spencer, espongo qui gli ulteriori risultati ottenuti per altra via, allo scopo di completare e controllare i precedenti.

2) *Esame delle sezioni sottili dei blocchi analizzati termicamente.*

Osservando a luce parallela e convergente, le sezioni sottili che mi preparai tanto dalla parte di fondo che da quella superiore, delle varie masse provenienti dalle fusioni, risulta che:

1. Lo joduro d'argento puro, si presenta in prismi di color giallo-canario, tendente al verde-bottiglia molto chiaro, birfrangenti, con estinzione parallela alla direzione d'allungamento, che è otticamente positiva.

2. Le miscele al 95 % AgI , che termicamente presentano un rallentamento a 175° ed un arresto a 147° , si mostrano di colore e proprietà simili al AgI puro, ma con molte plaghe colorate un po' più intensamente, che, esaminate, anche a luce convergente, si dimostrano monorfrangenti. La presenza di una quantità limitata di sostanza birfrangente, toglie ogni dubbio che l'invarianza dell'equilibrio a 147° , sia dovuta alla trasformazione della fase isotropa in quella esagonale del AgI , derivata da uno smistamento eventuale che accompagna la trasformazione dei cristalli misti, iniziandosi a 175° .

3. Miscele al 90 % AgI , si presentano come la precedente, ma possiedono minor quantità di elementi birfrangenti. Ciò dimostra che anche a questa concentrazione si è manifestato lo smistamento, quantunque l'analisi termica nulla abbia detto in proposito direttamente, e solo l'esame della durata dell'equilibrio invariante a 147° , per le miscele al 95 % AgI , in confronto a

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

⁽²⁾ Rend. Acc. Linc., XXIII (1914), 1°, 446.

quella corrispondente a 100 % AgI, permetta di dedurre che al 90 % AgI, con probabilità, lo stesso fenomeno si dovrebbe verificare, quantunque in proporzioni minori.

4. Le sezioni di miscele all'80 % AgI, corrispondenti alla concentrazione della miersite, tanto se provengono dalla parte di fondo, che da quella superiore dei blocchi, hanno colorito giallo-canario, meno pallido delle precedenti, con qualche punto più chiaro, che, a differenza del rimanente del campo, è birifrangente. Lo smistamento verificatosi anche a questa concentrazione è, però, molto limitato.

5. Sezioni di miscele al 70 AgI, non mostrano alcun elemento birifrangente.

6. Le sezioni a maggiori concentrazioni in CuI, presentano pure completa isotropia ottica, il loro colore va diventando sempre più debole, volendo al grigiastro, coll'aumentare del contenuto in CuI.

7. Lo ioduro rameoso puro si presenta, come termine limite di queste variazioni di tinta, grigiastro, quasi incolore, monorifrangente.

3) *Osservazione microscopica del processo di cristallizzazione.*

Non esistendo in questo Istituto che un vecchio microscopio da cristallizzazione di Lehmann reso inservibile, mi costrussi un fornello elettrico che applicai colle modificazioni del caso ad un comune microscopio; il preparato veniva in esso introdotto nella parte centrale colla saldatura di una pila termoelettrica di platino e platinorodio ben aderente al punto da esaminare. Mi fu in tal modo possibile seguire, tanto durante il riscaldamento fino alla fusione, che nel raffreddamento fino a temperatura ordinaria, i fenomeni ottici presentati dai componenti allo stato puro e dalle loro miscele a varie concentrazioni, esattamente dosate.

È noto che la misura esatta della temperatura posseduta dal preparato microscopico in esame in tali condizioni, non è delle più facili, come la storia stessa di tali determinazioni ampiamente dimostra a spese anche di valenti sperimentatori; perciò fu mia cura di pormi nelle migliori condizioni compatibili coi mezzi sperimentali di cui potevo disporre, e di graduare la termopila collegata a tutto il sistema, con punti di riferimento fissi e noti: calcolo in tal modo di aver ottenuto dei valori che possiedono un'approssimazione di circa a $\pm 5^\circ$.

1) Lo ioduro d'argento puro fonde in un liquido che, in istrati sottili e per trasparenza, si presenta di color rosso-sangue; per raffreddamento progressivo passa, a 555° , con un salto brusco ed evidentissimo, al color rosso-aranciato, quindi, per gradi insensibili, all'aranciato intenso, che va man mano facendosi più chiaro, diventando poi giallo-canario, ed impallidendo in seguito rapidamente. Se la fusione si effettua col vetrino coprioggetti, non è possibile scorgere tracce di orientazione cristallina nel raffreddamento, se si

eccettua un accenno fugacissimo nei primi istanti in cui appare la colorazione rosso-aranciata a 555° , fino alla temperatura di formazione della fase esagonale, punto in cui il preparato assume istantaneamente struttura cristallina spiccata, mentre contemporaneamente il colore canario-chiaro volge al verde-bottiglia assai debole e si manifesta la birifrangenza generale nel campo, che fino a questo punto si era mantenuto otticamente isotropo.

Facendo, invece, l'esperienza senza il vetrino coprioggetti, si vede che a 555° circa il cambiamento netto di colore è accompagnato da una orientazione cristallina di carattere grossolanamente poliedrico; i singoli elementi si deformano però, a temperature poco lontane da quella di formazione, sensibilmente per azione di urti dati lateralmente al piatto del microscopio, allungandosi nella direzione perpendicolare a quella degli urti. Per raffreddamento ulteriore la plasticità diminuisce rapidamente, ed a 147° si ha la trasformazione solita. L'aspetto di questa fase, che si dovrebbe col Lehmann chiamare cristallina fluente, assomiglia molto a quello della fase plastica del benzoato di colesterile e delle sue miscele col corrispondente acetato e propionato.

La fase dell'ioduro d'argento che esiste alla pressione ordinaria nell'intervallo di temperatura compreso tra 147° e 557° circa risultava poco ben nota, poichè, come osservai, tuttora si ritiene da molti cubica ordinaria, da altri liquida cristallina. — Il Lehmann⁽¹⁾ la considerò dapprima come plastica amorfa e rettificò poi la sua opinione⁽²⁾, dovuta a cattive condizioni sperimentali, ritenendola cristallina plastica, otticamente isotropa, avente per forma tipica l'ottaedro, mentre Tubandt⁽³⁾ si dimostrò completamente contrario a escluderla dalle fasi solide cristalline, e d'altra parte Stoltzenberg e Huth⁽⁴⁾ credettero, in base alle loro esperienze ottiche, che si tratti addirittura di una fase liquida cristallina. Quest'ultimo concetto fu adottato anche da Posner⁽⁵⁾ nell'ultima edizione delle Tabelle di Landolt-Börnstein in cui riportò come punto di fusione dell'ioduro d'argento quello a 145° , e come punto di chiarificazione quello a 552° (valori da lui adottati). Non è qui il luogo di discutere la portata delle contestazioni di Tubandt, nè le conclusioni di Stoltzenberg e Huth (che credo, in base alle loro stesse esperienze, poco convincenti e non molto concordanti col concetto di « cristalli liquidi » esposto dal Lehmann), poichè per lo scopo delle mie ricerche è sufficiente sapere che si tratti di una fase cristallina, ciò che da nessuno oramai

(¹) O. Lehmann, *Ueber physikalische Isomerie*. Zeitschr. f. Kryst., 1 (1877), 120.

(²) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst., 1 (1877) 492 in Nota, e Flüssige Kristalle, Leipzig (1904).

(³) Tubandt, Nernst Festschrift (1912) 446.

(⁴) Stoltzenberg e Huth, *Die kristallinisch-flüssige Phasen bei Monoalogeniden des Thalliums und Silbers*. Zeitschr. f. physik. Ch., 71 (1910), 641.

(⁵) Landolt-Börnsteins Tabellen, IV Aufl. (1912) 246.

viene posto in dubbio; noto, soltanto, che nelle mie ricerche non ho potuto riscontrare, nella fase discussa del Ag I, alcuna delle proprietà caratteristiche delle fasi liquide cristalline, e che quelle fra le osservazioni di Stoltzenberg e Huth che sono prive di possibili obiezioni riguardo al metodo sperimentale, concordano colle mie, e tutte insieme condurrebbero alla conclusione, adottata già da tanto dal Lehmann, che si tratti, cioè, di cristalli appartenenti alla categoria di quelli da lui chiamati: fluenti (*fließende Kristalle*).

2) Miscele al 95 Ag I e 5 Cu I (% mol.) hanno, allo stato fuso, color rosso-sangue, che nel raffreddamento subisce variazioni analoghe a quelle del Ag I puro. A 175° cominciano a delinearsi i primi elementi cristallini sotto il vetrino coprioggetti; essi hanno colore giallo-verdastro pallido e rapidamente si estendono a tutto il campo. A 147° alcuni cristalli più chiari, sparsi uniformemente nel campo, si manifestano birifrangenti. Eliminando il vetrino coprioggetti si osserva la formazione dei cristalli fluenti a 540-545°.

3) Miscele 90 Ag I + 10 Cu I si comportano analogamente alle precedenti; la comparsa degli elementi cristallini giallo-verdastro chiari si verifica nel raffreddamento a 205°, quella dei cristallini birifrangenti di iodirite, che qui sono in quantità molto minore, a 147°.

4) Le miscele 80 Ag I + 20 Cu I lasciano apparire i primi individui cristallini soliti verde-giallastri pallidi a 250°, i cristallini birifrangenti in scarsissima quantità a 147°.

5) Miscele di 75 Ag + 25 Cu I si comportano come la precedente. A 147° si manifesta ancora qualche rarissimo cristallino di iodirite nel campo monorifrangente.

6) Miscele a 70 Ag I + 30 Cu I, e 60 Ag I + 40 Cu I, appaiono a temperatura ordinaria completamente monorifrangenti; le temperature a cui nel raffreddamento compaiono i primi elementi cristallini sono rispettivamente 260 e 270°. Tutte queste miscele, se sono fuse tra due vetrini, non lasciano scorgere tracce di orientazione cristallina in corrispondenza ai punti della curva Aa bB del diagramma (fig. I, Nota I); fuse invece a superficie libera, lasciano scorgere chiaramente la fase plastica otticamente isotropa alle temperature relative.

7) Al 50 Ag I + 50 Cu I, si manifesta, anche tra i due vetrini, già a circa 490° una grossolana orientazione cristallina in tutto il campo che si presenta otticamente isotropo. A circa 300° si osserva nettamente la trasformazione di questi cristalli monorifrangenti in altri della stessa natura, che si conservano tali fino a temperatura ordinaria.

8) Miscele al 40, 30, 20 e 10 Ag I, presentano fenomeni analoghi alla serie precedente, con cristallizzazione iniziale e punto di trasformazione della fase cristallina a temperatura sempre più elevata.

9) Miscele al 5 Ag I + 95 Cu I, esaminate durante il raffreddamento, passano a 580° dallo stato liquido amorfo a quello cristallino, rimanendo

otticamente isotrope, come le precedenti: a circa 400° però, si trasformano talvolta, in una fase con forte birifrangenza che dura pochi secondi ed a 390° fa posto alla solita monorifrangente, che permane fino a temperatura ordinaria. Ordinariamente, invece, si ha passaggio diretto dalla fase cristallina monorifrangente superiore, alla monorifrangente inferiore. Operando, al contrario, a temperatura crescente, si osserva meglio e costantemente la birifrangenza fra 390 e 400°.

10) Lo ioduro rameoso puro, in istrati sottili, per trasparenza, si presenta, allo stato fuso, di color rosso-aranciato, che volge al giallo col raffreddamento ed a 600° cristallizza nettamente con forme molto simili a quelle osservate da Lehmann⁽¹⁾ per il cloruro ammonico; i cristalli, di color giallo, sono perfettamente isotropi e tali si conservano fino a 440°. A questa temperatura si manifesta istantaneamente la birifrangenza generale e molto forte nel campo, che appare costituito da cristalli prismatici molto allungati, che presentano estinzione parallela alla direzione d'allungamento. A 400°, la birifrangenza sparisce d'un tratto e l'isotropia ottica si conserva poi fino a temperatura ordinaria.

Questi fenomeni si manifestano benissimo, tanto nel raffreddamento che nel riscaldamento; e per osservare grossolanamente la doppia trasformazione, basta riscaldare comunque, fino a fusione, dello ioduro rameoso fra due vetrini, ed osservare il raffreddamento: ad occhio nudo, si scorge bene dapprima la cristallizzazione iniziale accompagnata da un lieve, ma netto cambiamento del colore rosso-aranciato, poi la trasformazione della fase monorifrangente formatasi, nella birifrangente, che si manifesta con variazione notevole di colore in giallastro, ed infine il passaggio dalla fase birifrangente alla cubica inferiore con nuovo e forte mutamento di tinta.

Risulta dimostrato da queste osservazioni, che lo ioduro rameoso di cui B. Gossner⁽²⁾ scoperse per il primo la fase birifrangente, è trimorfo nell'intervallo di temperatura che va da quella ordinaria a quella di fusione.

Le tre fasi cristalline hanno all'incirca i seguenti limiti di esistenza:

α CuI cubico 602-440°;

β CuI birifrangente 440-402°;

γ CuI cubico 402° — temp. ordinaria.

L'esistenza della fase cristallina monorifrangente α CuI al disopra di quella birifrangente, dà subito ragione del fatto osservato che, tutte le miscele a concentrazioni superiori al 50 % di CuI, danno, nel raffreddamento, come primo prodotto di cristallizzazione, un aggregato di cristalli otticamente isotropi, contrariamente a quanto era da aspettarsi in base alla ipotesi finora

⁽¹⁾ O. Lehmann, *Zeitschr. f. Kryst.*, 10 (1885) 321 e tav. X, fig. 1 a. Ved. anche Lehmann, *Fluessige Kristalle*. Leipzig, 1904, tav. 39, fig. 5.

⁽²⁾ B. Gossner, *Untersuchungen polymorpher Körper*. *Zeitschr. f. Kryst.* XXXVIII (1904), pag. 131.

accettata, che la fase birifrangente fosse l'unica esistente ad elevata temperatura.

Se si prende la temperatura di 400° come quella più elevata di esistenza della fase birifrangente delle soluzioni solide di concentrazione 95 CuI + 5 AgI, e si congiunge con una retta nel diagramma di stato, tale punto con quello che rappresenta la temperatura di trasformazione: $\alpha \text{ CuI} \rightleftharpoons \beta \text{ CuI}$ a 440°, si vede subito che il suo prolungamento taglia la curva CD prima di giungere alla concentrazione 90 CuI: ciò indica che il campo di esistenza delle soluzioni solide birifrangenti è molto limitato e spiega come, otticamente, solo per la concentrazione 95 CuI essa si potè osservare per un breve intervallo di temperatura, e come per le altre concentrazioni, i cristalli misti, che chiameremo per analogia α , dalla prima fase monorifrangente si trasformino direttamente nei γ -cristalli corrispondenti, senza passare per la fase β birifrangente.

La trasformazione: $\alpha \text{ CuI} \rightleftharpoons \beta \text{ CuI}$ avviene con effetto termico certamente poco considerevole, poichè coll'analisi termica essa non fu avvertita nè da me, nè da Mönkemeyer; si dovrebbe credere che anche la variazione di volume debba essere piccola, perchè non fu trovata dilatometricamente da Rodwell.

[Ho voluto incidentalmente provare se anche il bromuro ed il cloruro rameosi, dei quali Mönkemeyer (loc. cit., pag. 42) osservò la birifrangenza ad elevata temperatura, presentassero, analogamente all'ioduro corrispondente, una fase cristallina monorifrangente stabile a temperature superiori, e l'esperienza confermò le mie previsioni. Un indizio di questa doppia trasformazione si può avere anche qui osservando ad occhio nudo, analogamente a quanto dissi per il CuI, il raffreddamento degli alogenuri fusi tra due vetrini colle precauzioni del caso, essendo essi molto più ossidabili. Questi tre monoalogenuri di rame possiedono, quindi, fra la fase liquida e quella cristallina birifrangente, una fase cristallina cubica, la quale era sfuggita a Mönkemeyer nelle sue osservazioni microscopiche in base a cui affermava (loc. cit.): « Zwischen den Deckgläschen erstarrten die Verbindungen (CuCl, CuBr, CuI) zu doppeltbrechenden Kristallen ». Mi riservo di tornare in seguito sul polimorfismo degli alogenuri rameosi].

Chimica. — *Sui borati. Sistema* $\text{BaO} \rightleftharpoons \text{B}^2\text{O}^3 - \text{H}^2\text{O}$ *a* 30° ⁽¹⁾
Nota II di U. SBORGI, presentata dal Socio R. NASINI.

In una Nota precedente ⁽²⁾ ho riferito sulla preparazione dei borati di bario di cui mi sono servito per lo studio di questo sistema. Siccome nello studio del sistema $\text{CaO} - \text{B}^2\text{O}^3 - \text{H}^2\text{O}$ a 30° avevo avuto occasione di constatare [come è dimostrato dai dati riferiti nelle Note sui borati di calcio ⁽³⁾] che il sistema perviene all'equilibrio con rapidità notevolmente maggiore se si mettono a reagire un borato preformato con acido borico ed acqua o colla base e l'acqua, piuttosto che se si mettono a reagire l'acido la base e l'acqua, ritenni opportuno anche per i borati di bario di seguire il primo metodo, e constatai subito, in esperienze preliminari, che questo presentava un vantaggio specialmente nei casi in cui occorreva sperimentare con miscugli più ricchi in acido borico e meno in barite.

I metodi di ricerca ed i modi di rappresentazione grafica sono gli stessi da me adottati nello studio degli altri borati, ed è superfluo descriverli ancora. L'agitazione in termostato si compieva coi soliti apparecchi per il tempo che indico nella tabella dove sono riuniti i risultati sperimentali.

L'estrazione delle soluzioni da analizzare si faceva anche qui con pipette due volte ricurve, attraverso tela fitta, tenendo i palloncini in termostato durante l'estrazione. L'analisi si eseguiva coi metodi volumetrici descritti anche per i borati di bario nella Nota precedente. Si adopravano o soluzioni normali, o $1/2$ normali, o $1/10$ normali a seconda dei casi. I risultati ottenuti furono soddisfacentemente concordanti sia per quello che riguarda le analisi successive di una stessa soluzione, sia per quello che riguarda le analisi di soluzioni a composizione costante (punti di invarianza), riferentisi ad esperienze diverse. Le difficoltà analitiche non erano di per sè grandi, data la semplicità del metodo di analisi; ma divenivano in alcuni casi assai rilevanti per le particolari condizioni di solubilità dei composti formantisi. Si aveva in generale da fare o con liquidi ad alto contenuto in barite e piccolo in acido borico, o viceversa: specialmente il contenuto in barite in alcuni punti era estremamente piccolo. Inoltre, nelle zone più ricche in acido borico, quelle riferentisi alla curva del triborato, il precipitato si deponeva molto lentamente; e all'estrazione si aveva un liquido limpido solo adoprando grandi precauzioni. Queste stesse difficoltà io avevo constatate nello studio dei borati

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Pisa.

(²) Rend. Acc. Lincei, vol. XXIII, 1° sem., fasc. 7°, pag. 530.

(³) Ibid., vol. XXII, 1° sem., fasc. 9, pag. 636 e 715 e fasc. 11, pag. 798.

di calcio, si può dire addirittura identiche. Tuttavia per il bario lo studio della curva del metaborato è assai più facile, perchè questa curva si estende fino a quella della barite, che è relativamente assai alta in confronto a quella della calce. Credo in ogni modo che le ricerche siano in tutti i casi facilitate dall'impiego di borati preformati; e credo che questa sia la via più adatta per lo studio di questi sistemi riferentisi ai borati alcalino-terrosi.

Ho già detto che io avevo a disposizione diversi borati di bario preparati nel modo descritto nella Nota precedente. Precisamente avevo a disposizione l'1-1-4, il 2-3-6 e l'1-3-7. Che i precipitati ottenuti, rispondenti a queste formule, fossero composti unici, o miscugli di borati, per il mio scopo era perfettamente lo stesso, dato che io dovevo impiegarli a reagire fino all'equilibrio con soluzioni variabili di barite in acqua o di acido borico in acqua.

E del resto erano queste stesse esperienze che — meglio di ogni supposizione preliminare — avrebbero potuto risolvere tale questione, per lo meno per quanto riguarda la temperatura di 30°. Tuttavia, poichè il composto più cristallino, e di composizione più vicina alla teorica ed esente completamente da carbonato, era il metaborato tetraidrato ottenuto nella preparazione IV, fu con questo composto che eseguii dapprima tutte le esperienze. (Di un composto simile, il metaborato esaidrato, mi ero servito anche per le esperienze sui borati di calcio). In seguito, avute dallo svolgersi delle esperienze molte indicazioni sulle caratteristiche del sistema studiato, adoprai anche per controllo e conferma gli altri borati, specialmente il triborato, come dirò meglio dopo. Nella tabella seguente, le esperienze sono riportate nell'ordine dei punti successivi che le rappresentano sul diagramma. Per ciascuna di esse si trovano indicate le sostanze che furono poste a reagire e il tempo di reazione o, a meglio dire, il tempo in cui furono lasciate in termostato. L'equilibrio si raggiungeva più o meno presto (più presto nella zona in cui la soluzione era ricca in barite, meno presto in quella in cui la soluzione era ricca in acido borico); ma, per precauzione, si protrasse il tempo di reazione in alcuni casi fino a quattro mesi. È notevole che le zone dove la reazione si faceva più lenta, erano quelle stesse del borato di calcio: e precisamente quelle in cui si aveva per corpo di fondo un composto ricco in acido borico in presenza di una soluzione assai concentrata in acido borico (concentrata, s'intende, rispetto alla solubilità dell'acido borico).

ESPERIENZA — Numero	SOSTANZE poste a reagire	TEMPO di agitazione — Giorni	SOLUZIONE			RESTO		
			B ¹ O ³ %	Ba O %	H ² O %	B ² O ³ %	Ba O %	H ² O %
1	1-1-4, acido borico, acqua	52	3.6220	0.04301	96.3350	10.113	2.059	87.82
2 a	"	12	3.663	0.0566	96.2804			
" b	"	18	3.621	0.0570	96.322			
3 a	"	16	3.6537	0.05591	96.2904			
" b	"	40	3.640	0.0447	96.3153	32.996	2.3176	64.6564
4	"	44	3.658	0.04876	96.2982	11.4840	0.7324	87.7836
5	"	131	3.669	0.04401	96.287	10.396	0.1519	89.4521
6	"	135	3.6771	0.03807	96.2848	11.6870	1.9285	86.4345
7	1-3-7	35	3.5745	0.04625	96.3793	7.601	1.9627	90.437
8	1-1-4	49	3.4273	0.03718	96.5355	6.902	2.682	90.416
9	"	11	2.5127	0.04429	97.4431			triborato
10	1-3-7	37	1.9046	0.03693	98.0585	7.593	4.0767	88.3303
11	"	10	1.6875	0.0675	98.2450	15.45	10.02	74.53
12 a	1-1-4	12	1.326	0.0371	98.6369			
" b	"	16	1.327	0.0533	98.6197			
" c	"	25	1.375	0.0745	98.5505	6.2890	3.7023	90.0087
13	1-3-7	7	0.6490	0.0774	99.2735			
14 a	"	8	0.3059	0.1632	99.5309			
" b	"	23	0.2801	0.1475	99.5724			

acido borico + triborato

"

"

ESPERIENZA	SOSTANZE poste a reagire	TEMPO di agitazione → Giorni	SOLUZIONE			RESTO		
			B ¹ O ² %	Ba O %	H ² O %	B ² O ³ %	Ba O %	H ² O %
15 a	1-3-7, acqua	4	0.2971	0.2422	99.4607			
" b	" " " " " " " "	18	0.2971	0.2265	99.4764			
16 a	1-1-4, acido borico, acqua	10	0.3350	0.1845	99.4805			
" b	" " " " " " " "	46	0.2809	0.2009	99.5183	24.663	18.44	56.897
17 a	1-1-4, 1-3-7, acqua . . .	4	0.2938	0.458	99.2482			
" b	" " " " " " " "	15	0.2934	0.3902	99.3164			
18 a	1-1-4, acido borico, acqua	11	0.3175	0.2278	99.4547			
" b	" " " " " " " "	17	0.2997	0.2789	99.4214	17.145	14.47	68.885
19 a	" " " " " " " "	8	0.3754	0.2849	99.3397			
" b	" " " " " " " "	10	0.3396	0.2965	99.3639			
" c	" " " " " " " "	11	0.3451	0.3117	99.3432	14.663	25.277	60.06
20 a	" " " " " " " "	7	0.3449	0.2767	99.3784			
" b	" " " " " " " "	14	0.3228	0.3158	99.3614			
" c	" " " " " " " "	17	0.31395	0.3176	99.3684	18.18	18.98	62.84
21 a	" " " " " " " "	10	0.3234	0.30618	99.3704			
" b	" " " " " " " "	45	0.3125	0.3318	99.3557	17.087	19.35	63.563
22 a	1-1-4, 1-3-7, acqua . . .	7	0.3144	0.5978	99.0878			
" b	" " " " " " " "	18	0.31975	0.5443	99.1389	19.435	25.92	45.355
23 a	1-1-4, acqua	8	0.2266	0.497	99.2764			
" b	" " " " " " " "	10	0.2303	0.493	90.2767	12.940	28.533	58.527

EsPERIENZA	SOSTANZE poste a reagire	TEMPO di agitazione — Giorni	SOLUZIONE			RESTO		
			B ² O ³ %	BaO %	H ² O %	B ² O ³ %	BaO %	H ² O %
24 a	1-1-4, barite, acqua . .	7	0.205	1.19	98.605			
" b	" " "	15	0.2131	1.187	98.6001			
" "	" " " "	18	0.2038	1.1966	98.5976			
25	" " " " "	5	0.2090	2.2687	97.4223	7.307	19.26	73.433
26 a	" " " " "	4	0.2297	3.345	96.4253	14.503	33.31	52.187
" b	" " " " "	8	0.23	3.3375	96.4125			
" c	" " " " "	14	0.226	3.352	96.4218	6.868	17.464	75.668
27 a	" " " " "	8	0.2146	4.0540	95.7314			
" b	" " " " "	12	0.2431	4.80	94.9509	17.068	39.657	43.275
28 a	" " " " "	7	0.2569	5.426	94.3171			
" b	" " " " "	11	0.2567	5.412	94.3313	16.025	38.003	45.972
29 a	" " " " "	6	0.2586	5.7286	94.0128			
" b	" " " " "	10	0.271	5.741	93.9880	8.0373	36.5900	55.3727
30 a	" " " " "	6	0.2617	5.779	93.9593			
" b	" " " " "	13	0.2613	5.7983	93.9394	8.428	31.145	65.427
" c	" " " " "	18	0.2579	5.8166	93.9255			
31 a	" " " " "	2	0.0801	5.2346	94.6853			
" b	" " " " "	11	0.0783	5.1295	94.7922			
" c	" " " " "	17	0.0827	5.291	94.6263	0.05921	34.754	65.1816

metaborato

"

"

"

"

metaborato
e barite

"

barite

In continuazione della presente Nota pubblicherò prossimamente il diagramma ricavabile dai dati della tabella precedente e le conclusioni che da essi si possono trarre.

Chimica. — *Sulla reazione del nitroprussiato con alcuni chetoni*. Nota II di LIVIO CAMBI, presentata dal Socio A. ANGELI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Ilmenite di Val Devero (Ossola)*⁽¹⁾. Nota di ANGELO BIANCHI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Durante gli ultimi anni, in diversi periodi di dimora estiva nella bella conca verde di *Baceno*, che s'apre a sud-est verso la valle Antigorio (la principale delle Valli Ossolane), ebbi modo di visitare e conoscere la regione circostante, che forma il bacino del torrente Devero, tributario del Toce, persuadendomi ogni anno più dell'interesse mineralogico che essa presenta. Ad occuparmene seriamente mi spinse, oltre a ciò, il fatto che nessun lavoro di mineralogia ha finora illustrato direttamente questa valle ossolana, che pur confina direttamente con una delle regioni svizzere più sfruttate e meglio studiate, la valle di Binn, e che tanta importanza ha dal punto di vista geologico, da poter esser considerata, assieme all'attiguo gruppo del Sempione, una regione classica, per gli studi diretti a spiegarne l'intricato sistema geotettonico⁽²⁾. Intricato perchè, dal suo sbocco in Valle Antigorio, alle montagne che la circondano lateralmente, alla cima del gruppo del Cervandone, che ne forma un magnifico sfondo roccioso, questa valle mostra il succedersi e l'alternarsi di una serie di *gneiss*, differenti per composizione, struttura ed origine, con varie formazioni scistose e calcari intercalate, che oramai la maggior parte dei geologi considera come mesozoiche.

Ma a tale riguardo mi basta aver accennato così, molto in generale, al motivo tettonico della regione, e ricorderò solo che è interessante la presenza, fra le montagne di confine, di una massa di *Serpentina* e di rocce verdi, che forma il bacino dei laghi di Geisspfad, le punte della Rossa e del Fisso, e spinge le sue propaggini verso sud-ovest, a radicarsi nelle rocce del Cervandone⁽³⁾.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pavia.

⁽²⁾ Vedansi per la regione le opere ed i lavori ben noti del Gerlach, Traverso, Stella, Schardt, Schmidt, Preiswerk, De Stefani, ecc..., la carta di Schmidt, Preiswerk e Stella e quella recente dell'Ufficio Geologico Italiano.

⁽³⁾ Studiata specialmente dal Preiswerk. Vedi anche: L. Debuissons, *La Vallée de Binn*. Losanna, 1909, pp. 38 e segg.

Nella ricchissima messe di lavori relativi alla Binnenthal, e nella bellissima opera geologico-mineralogica di L. Debuissons che tutti li compendia ⁽¹⁾, si trova bensì citato o descritto anche qualche giacimento sul versante italiano della catena che separa l'Ossola e la Valle di Binn, ma si tratta solo di località ben prossime al confine, o sul confine stesso, e considerate come adiacenze di quest'ultima valle. Onde non ritengo privo di interesse uno studio mineralogico completo della Val Devero, pel quale intendendo continuare e completare le osservazioni e le ricerche, già da alcuni anni intraprese e troppo spesso ostacolate dalle insidie del tempo od impedita dalla neve.

Frattanto, come Nota preliminare, non credo inutile far conoscere fin d'ora alcuni cristalli assai interessanti di *Ilmenite*, raccolti nell'estate scorsa, occupandomi per ora della forma cristallina, nella speranza che nuove, fortunate ricerche, mi permettano di darne in seguito anche un'analisi chimica esatta.

Trovai l'*Ilmenite* cristallizzata in due blocchi diversi, sul versante italiano della catena di confine, fra il M. Cervandone e la punta della Rossa, sopra la morena del ghiacciaio della Rossa. L'uno è un cloritescisto tipico; l'altro una roccia notevolmente fresca, che l'esame microscopico ha dimostrato costituita quasi essenzialmente di diallagio, con poca Olivina, qualche lamella di Clorite fortemente pleocroica, e scarsi granuli di *Ilmenite*, mostranti qua e là un principio di trasformazione in *Leucoxeno*. Si tratta probabilmente di una *facies* ricca in diallagio delle *Wehrli*, osservate anche dal Preiswerk ⁽²⁾ associate alla dunita del passo di Geisspfad (passo della Rossa). Evidentemente dunque entrambi i blocchi provengono dalla massa di rocce verdi sopra menzionata.

Nel cloritescisto è impiantato un cristallo tabulare di *Ilmenite*, di dimensioni notevoli, accompagnato da altri più piccoli in intima connessione con cristalli di Clorite, irregolarmente sviluppati, e con abito per lo più esagonale. Nel 2° campione sono parecchi cristalli e frammenti, di minor dimensione, con forma tabulare assai più tozza, ed essi pure intimamente connessi con una Clorite in cristalli irregolari, in cui prevale l'abito trigonale, e che, pei suoi caratteri ottici sembra doversi ascrivere piuttosto ad una Pennina che ad un Clinocloro.

Carattere essenziale e comune nei cristalli di *Ilmenite* da me trovati è lo sviluppo predominante (oltre all'ampiezza della base) del romboedro: $n = \{2243\}$, o del reciproco: $n' = \{4223\}$, forme che si presentano pure frequenti nella *Ilmenite* della Valle di Binn. Anzi in alcuni cristalli di Val Devero si nota l'accoppiamento di entrambi questi romboedri, diretto

⁽¹⁾ Ved. op. cit.

⁽²⁾ Preiswerk, *Ueber Dunitserpentin am Geisspfadpass*. Inaug. Diss. Basel 1901.

ed inverso, equisviluppati, come nell'esemplare della Binnenthal descritto dal Bücking ⁽¹⁾ e proveniente dall'Alpe Lercheltini, località assai discosta dalla nostra. Notiamo però subito che, oltre ad altri caratteri distintivi che vedremo, anche in questi cristalli del 2° tipo, lo sviluppo di una delle due forme reciproche accoppiate è tanto preponderante su quello dell'altra, da mantenere il carattere accennato. Alcune forme dell'Ilmenite del Cervandone sono invece comuni coi cristalli della regione dell'Ofenhorn (Punta d'Arbola), trovati nei micascisti e resi noti dal Solly ⁽²⁾; altre non si trovano alla Binnenthal, ma furono già osservate in altri giacimenti, ed altre infine sono nuove, non ancora riscontrate in tale specie minerale.

Le forme da me osservate sono le seguenti:

$$\begin{aligned} c &= \{0001\} \\ \zeta &= \{20\bar{2}5\}, \alpha = \{11\bar{2}0\}, n = \{22\bar{4}3\}, n' = \{4\bar{2}\bar{2}3\}, \pi = \{11\bar{2}3\} \\ r &= \{10\bar{1}1\}, s = \{02\bar{2}1\}, \chi = \{44\bar{8}3\}, \chi' = \{8\bar{4}\bar{4}3\}, \delta = \{24\bar{6}7\} \\ M &= \{40\bar{4}1\}, e = \{01\bar{1}2\}, Y = \{88\bar{1}63\}, Y' = \{16\bar{8}\bar{8}3\}, z = \{5\bar{3}\bar{2}2\}. \end{aligned}$$

Di esse, tralasciando le forme solite pel minerale, sono descritte colla valle di Binn, oltre ai romboedri n ed n' già ricordati, le: $M = \{40\bar{4}1\}$ e $\delta = \{24\bar{6}7\}$. La $\chi' = \{8\bar{4}\bar{4}3\}$ fu invece notata per la prima volta assieme ad altre forme caratteristiche, due anni or sono, dall'ing. Magistretti nella Ilmenite di Val Malenco ⁽³⁾, dove trovasi pure la $\pi = \{11\bar{2}3\}$, poco comune per l'Ilmenite. Infine sono finora caratteristiche per la Val Devero le forme:

$$Y = \{88\bar{1}63\}, Y' = \{16\bar{8}\bar{8}3\}, z = \{5\bar{3}\bar{2}2\}$$

che mi risultano nuove pel minerale ⁽⁴⁾.

Coll'angolo tra le facce: $(0001) : (10\bar{1}1)$, quasi uguale in tutti i cristalli e più volte misurato sugli stessi con ripetizione sul disco, ottenni, fra i valori vicinissimi di: $57^\circ, 58'$, e $57^\circ, 59'$, una media uguale al valore calcolato dal Kokscharow per l'Ilmenite di Atliansk ⁽⁵⁾ ($c-r = 57^\circ, 58', 30''$). Sicchè, calcolata con questo angolo, la costante per i cristalli di Val Devero, coincide con quella data dal Kokscharow:

$$\frac{c}{a} = q = 1,38458.$$

⁽¹⁾ H. Bücking, Groth's Zetschr., 1-576. (Ved. anche Hintze, Handb. der Min., 1908. pag. 1866.

⁽²⁾ R. H. Solly, Miner. Soc. Lond. 1906, 14, 184.

⁽³⁾ L. Magistretti, *Ilmenite delle Cave di pietra Ollare di Chiesa* (Val Malenco). R. Accad. dei Lincei, Roma, 1° dicembre 1912.

⁽⁴⁾ La prima di tali forme si trova nella Ematite (ved. Struever, *Studi sulla Ematite di Traversella*. Atti Accad. di Scienze. Torino, 1872). Evidentemente per un errore di stampa viene dal Bücking, nel lavoro citato, a pag. 579, riportata col contrassegno dall'autore usato per indicare le forme della Ilmenite.

⁽⁵⁾ V. Kokscharow, Mater. Miner. Russl. 1870, VI, 355.

Colla quale costante mi risulta un accordo grandissimo fra gli angoli calcolati e quelli misurati, come appare chiaramente dalla tabella riportata più avanti.

Ecco ora una breve descrizione degli individui dei due campioni trovati:

I cristalli del Cloritescisto hanno, come dissi, una forma tabulare molto appiattita, dovuta alla grande estensione della base. Sulle altre forme domina in modo assoluto il romboedro inverso: $n' = \{4\bar{2}\bar{2}3\}$, stipando in una sottile fascia, strozzata nel mezzo, la zona dei romboedri di 1° ordine. È questa la disposizione costante e caratteristica, che dà l'aspetto tipico alla Ilmenite di Val Devoro. Le altre facce, sottili e lunghe, smussano alternativamente gli spigoli fra il romboedro maggiore e la base. Di tali cristalli, quello migliore, la cui base raggiunge la dimensione massima di circa 10 mm., è costituito dalla combinazione delle seguenti forme (ved. fig. 1):

$$\{0001\} \{4\bar{2}\bar{2}3\} \{20\bar{2}5\} \{10\bar{1}1\} \{40\bar{4}1\} \{02\bar{2}1\} \{44\bar{8}3\} \{88\bar{1}63\}.$$

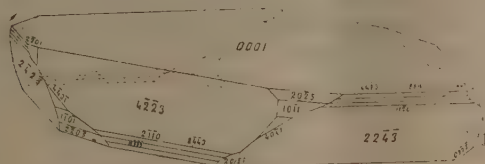


FIG. 1.

I cristalli dell'altro pezzo, più numerosi, hanno aspetto più tozzo e mostrano il predominio del romboedro diretto $n = \{2243\}$.

In parecchi a questo è accoppiato il suo reciproco $n' = \{4\bar{2}\bar{2}3\}$, sempre però ridotto a proporzioni assai più limitate, come tutte le altre forme, il che mantiene ancora l'aspetto tipico, citato per gli individui del Cloritescisto.

Sono assai ricchi di forme, ed il migliore di essi presenta questa notevolissima e complessa combinazione:

$$\{0001\} \{4\bar{2}\bar{2}3\} \{2243\} \{20\bar{2}5\} \{10\bar{1}1\} \{40\bar{4}1\} \{02\bar{2}1\} \{11\bar{2}0\} \{01\bar{1}2\} \{8443\} \\ \{16883\} \{24\bar{6}7\} \{5\bar{3}22\}.$$



FIG. 2.

Ho rappresentato questo cristallo nella figura n. 2, attenendomi il più possibile alla sua forma naturale, onde conservare il tipico sviluppo relativo delle facce, che i disegni, meglio di ogni descrizione possono rendere fedelmente.

A metà circa della parte di cristallo libera, in corrispondenza di una fessura fra la base e la (2243), si notano alcune facce, colle quali si abbozza un secondo individuo più piccolo, in associazione perfettamente parallela col primo, e colla $n = (2243)$ coincidente.

Le facce sono ben delimitate e lucentissime, onde se ne hanno immagini riflesse assai nitide e misure esatte.

In un altro cristallo dello stesso tipo, ma meno ricco di forme, ho trovato invece la $\pi = \{11\bar{2}3\}$.

Da quanto ho detto, dalle misure, per le quali altri cristalli e frammenti, oltre quelli descritti, mi servirono, e dalle figure, risulta evidente che questi cristalli di Val Devero meritano di essere annoverati fra i più notevoli di questa specie minerale; e d'altra parte presentano tali caratteri distintivi da non poter essere confusi coi cristalli di Ilmenite, finora conosciuti, della vicina Valle di Biun.

TABELLA DEI VALORI ANGOLARI MISURATI, E CALCOLATI (COSTANTE DI KOKSCHAROW).

ANGOLI		LIMITI OSSERVATI	MEDIE	VALORI CALCOLATI	DIFFERENZE	NUMERO
0001	011̄2	38,32' - 38,37'	38,35 1/2	38,38	— 0,2 1/2	5
"	022̄1	72,34 - 72,48	72,37 1/2	72,38	— 0,0,30"	4
"	404̄1	81,5 - 81,9	81,7 1/2	81,6 1/2	+ 0,1	6
"	101̄1	57,58 - 57,59	57,58 1/2	57,58 1/2	—	9
"	202̄5	32,27 - 32,34	32,33	32,36	— 0,3	5
"	422̄3	61,31 - 61,35	61,33	61,33	—	15
"	844̄3	74,46 - 74,56	74,50	74,52	— 0,2	6
"	168̄83	82,6 - 82,15	82,10	82,11	— 0,1	3
"	211̄0	89,48 - 90,15	90,2	90	+ 0,2	6
"	112̄3	42,45 - 42,44	42,44 1/2	42,42	+ 0,2 1/2	3
"	426̄7	50,18 - 50,20	50,19	50,23 1/2	— 0,4 1/2	2
224̄3	422̄3	52,7 - 52,9	52,7 1/2	52,10	— 0,2 1/2	4
844̄3	"	13,16 - 13,21	13,19	13,19	—	6
224̄3	242̄3	99,8 - 99,12	99,10 1/2	99,11 1/2	— 0,0,45"	7
"	224̄3	56,54 - idem	56,54	56,54	—	2
"	112̄0	28,19 - 28,39	28,29	28,27	+ 0,2	5
"	101̄1	26,3 - 26,7	26,4 1/2	26,5	— 0,0,30"	6
"	202̄5	35,42 - 35,45	35,44	35,46	— 0,2	4
"	844̄3	56,39 - 56,41	56,40	56,45	— 0,5	2
"	022̄1	29,34 - 29,41	29,38	29,39	— 0,1	5
"	246̄7	14,20	14,20	14,20	—	1
"	112̄3	18,48 - 18,49	18,48 1/2	18,51	— 0,2 1/2	2
"	011̄2	32,1 - 32,14	32,6	32,3	+ 0,3	7
"	253̄2	50,31 - 50,33	50,32	50,30 1/2	+ 0,1 1/2	2
"	624̄7	82,1	82,1	81,57 1/2	+ 0,3 1/2	1
101̄2	101̄1	83,56 - 84,15	84,7	84,4	+ 0,3	4
242̄3	"	75,23 - 75,26	75,24 1/2	75,22	+ 0,2 1/2	3
404̄1	"	23,6 - 23,11	23,8	23,8	—	6
022̄1	"	55,41 - 55,54	55,46	55,50	— 0,4	3
202̄1	"	25,25 - 25,31	25,27	25,22	+ 0,5	4
202̄1	224̄3	54,10 - 54,17	54,14	54,14	—	5
202̄1	101̄2	33,59 - 34,2	34,0 1/2	34	+ 0,0,30"	3
"	624̄7	27,36 - 27,46	27,42	27,44	— 0,2	3
"	448̄3	28,50 - 28,50	28,50	28,51	— 0,1	2
"	325̄2	22,25	22,25	22,28 1/2	— 0,3 1/2	1
202̄5	110̄2	34,13 - 34,22	34,17	34,18	— 0,1	9

Mi è grato chiudere questo primo lavoro coll'esprimere al prof. L. Brugnatelli la mia viva riconoscenza per gli insegnamenti ed i consigli affettuosi di cui mi fu largo, adempiendo così il più gradito dovere di un discepolo verso il suo Maestro.

Geologia. — *Di alcune nummuliti dell'Isola di Rodi.* Nota di LINA PIERAGNOLI, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Terreni di Rodi. — Masse cretacee si elevano nel centro dell'isola con forme alpestri, a picco: il *flysch* eocenico è formato da terreni poco resistenti e occupa anch'esso regioni montuose, ma meno alte, meno a picco e più fertili.

Il Bukowski nella *Geologische Uebersichtskarte der Insel Rhodus* dice che nella regione occidentale il *flysch* occupa essenzialmente il paese montuoso al nord e all'ovest del M. Ataviros, o più precisamente quella parte che si trova tra la formazione cretacea, le montagne del Kitale e i terreni cretacei e eocenici al capo di Kopria e al M. Acramitis. In questa parte occidentale dell'isola manca del tutto il terziario giovine, o appare in piccoli lembi disturbando poco la struttura generale.

Bukowski trovò nummuliti nella regione occidentale dell'isola, in una breccia calcarea scura, inclusa nelle arenarie e negli schisti.

Solo il De la Harpe aveva indicato nummuliti dell'isola di Rodi nel suo lavoro: *Étude des nummulites de la Suisse*. *Memoires de la Société Paléontologique suisse*, pp. 120-121; aveva trovato la *N. Gizehensis*, la *N. curvispira* e la *N. lucasana* e questa citazione era sfuggita a tutti quelli che hanno dato la bibliografia dell'isola: appunto in questa parte del *flysch*, di cui parla il Bukowski, si trovano i fossili raccolti dal prof. A. Martelli e a me cortesemente affidati. Brecciole nummulitiche, arenarie di color grigio scuro, contengono una quantità straordinaria di nummuliti, alcune tanto ben conservate e isolate da poterne fare preparazioni microscopiche senza bisogno di calcinazione: in queste brecciole sono incluse piccole ghiaiette calcaree biancastre in gran quantità. Esse sono simili alle brecciole nummulitiche che si trovano nel nostro Appennino toscano: provengono dal *flysch* tra Embona e Kastellos, presso Embona, tra Apollona e Embona e dalle masse calcaree che si trovano tra Apollona e Embona.

Le specie trovate da me sono le seguenti:

Nummulites Gizehensis Forskal, forma A: questa nummulite era conosciuta prima col nome di *curvispira*: così la chiamano d'Archiac e Heime, de la Harpe ecc. Il Lister per primo, pur chiamandola sempre *curvispira*, la considera come la forma A della *Gizehensis*, e finalmente il Boussac la chiama col nome stesso della forma a microsfera.

Questa nummulite, insieme colla forma B e colla *N. lucasana*, è stata rammentata da De la Harpe come frequente nell'isola di Rodi. Ho trovato tanto la forma B che la A, e quest'ultima raggiunge anche 6 mm. di dia-

metro. Questa specie appartiene al luteziano: si trova tra Embona e Kastellos, presso Embona, tra Apollona e Embona.

Nummulites Garnieri, De la Harpe. Forma A. È di piccole dimensioni. È una specie che ha fatto De la Harpe per alcuni esemplari delle basse Alpi a lui mandati da Garnier.

Nei pezzi di roccia che ho io non si può ben distinguere la superficie: si vede però che deve essere striata e punteggiata. La spira è regolare, la lamina spirale è discretamente spessa; la camera centrale è piccola, i setti sono fitti, quasi dritti fino all'attaccatura superiore, le camere più alte che larghe.

Appartiene al Priaboniano inferiore o Bartoniano. Si trova presso Embona, tra Apollona e Embona, tra Embona e Kastellos.

Nummulites perforata Denys de Montfort. Di questa specie ho trovato la forma B che è facile riconoscere macroscopicamente a Embona, tra Embona e Kastellos. La forma A non è proprio la forma tipo; se ne discosta un po' per avere la lamina spirale meno grossa e i setti meno curvi: è somigliantissima alla *Gumbelia Roualti* di Prever, ma Boussac include anche questa nella *perforata*.

Anche io sono dell'avviso che la *perforata* varia spessissimo e non si può fare una specie diversa per ogni variazione.

I miei esemplari hanno spira più o meno regolare, quattro giri, camera centrale grande, setti impiantati un po' obliquamente sulla lamina, ricurvi nella parte superiore; camere più alte che larghe alcune; in altre è invece il contrario. Si trova tra Embona e Kastellos, tra Apollona e Embona. Appartiene al luteziano.

Non ho potuto isolare altre nummuliti per esaminarle al microscopio, ma all'osservazione diretta ho trovato qualche esemplare di *Assilina exponens* Sowerby (forma A) presso Embona.

Neppure nelle masse calcaree che si trovano presso Embona ho potuto isolare nummuliti colla calcinazione o con altro sistema: ho fatto varie sezioni trasparenti della roccia, e in queste ho notato nummuliti che ho potuto riconoscere per la *N. Garnieri* [A] e la *N. Gizehensis* [A].

Oltre a queste ho trovato nelle sezioni alcuni esemplari di *Lithotamnium*, di *echino*, di *operculina*, *quinqueloculine*, *biloculine*, *orthofragmine*, *alveoline*, di cui ho potuto distinguere una specie, l'*Alveolina oblonga* di Fortis, e due esemplari di *Nodosaria*.

Le nummuliti da me indicate sono della parte più alta dell'eocene medio, quindi appartengono a quell'età i terreni che si stendono intorno a Apollona, a Embona, a Kastellos. Il prof. Martelli⁽¹⁾ dice che il *flysch* dell'isola di

(¹) Martelli, *L'isola di Stampalia*. Bollettino della Società geografica, n. 6, 1° giugno 1913, serie V, vol. II, pag. 686.

Rodi è molto più alto di quello di Stampalia, e sarebbe compreso nella parte più alta dell'eocene superiore. Io non ho trovato che una nummulite appartenente al Priaboniano e Bartoniano: la *N. perforata* si trova anche nel *flysch* dell'isola di Stampalia: a me pare quindi che gli strati donde provengono le nummuliti esaminate possano essere più alti di quelle dell'isola di Stampalia esaminati dal Martelli, ma appartengano tuttora alla parte più alta dell'eocene medio; non già all'eocene superiore.

Geologia. — *Sulla origine delle acque sotterranee del versante orientale dell'Etna* ⁽¹⁾. Nota di G. PONTE, presentata dal Corrispondente G. DI STEFANO.

La teoria delle acque piovane infiltranti nel sottosuolo, radicata da due secoli e mezzo nella mente degli idrologi, ha trovato di recente, specialmente in Germania ed in Russia, numerosi oppositori.

Gli studiosi di oggi, con osservazioni dirette dei fenomeni e con prove sperimentali vengono a demolire la secolare teoria che il Mariotte, più con la sua autorità di scienziato anziché con i pochi dati pluviometrici sui quali egli si basava, aveva saputo far prevalere nonostante la efficace opposizione dei francesi Perrault, de la Hire e Sedileau, degli inglesi Derham e Woodward, dell'olandese Lulofs e del tedesco Kästner.

Sono le embrionali idee di Aristotele sulla condensazione degli elementi dell'aria nel sottosuolo che vengono oggi ad acquistare un vero valore scientifico.

Kohler in una sua interessante relazione ⁽²⁾ espone una serie di ricerche e di risultati che militano contro la secolare teoria dell'infiltrazione. Si è potuto constatare, egli dice, che il rendimento delle sorgenti non va parallelo con la quantità delle acque infiltranti; che l'abbassamento del livello barometrico apporta un accrescimento nelle sorgenti, non spiegabile con l'aumento della velocità di permeazione accelerata dalla pressione; che alcune sorgenti, le quali durante lunga siccità disseccano del tutto, incominciano poi a fluire prima che incominci la pioggia; ed infine, che esistono delle sorgenti in cima ai monti le quali in nessun modo possono essere alimentate dalle acque infiltranti.

Il primo geologo che scagliandosi contro la dogmatica teoria dell'infiltrazione diede una nuova spiegazione scientifica sulla origine delle acque

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Vulcanologia dell'Università di Catania.

⁽²⁾ F. Kohler, *Neuere Grundwassertheorien*. Zeitschrift für prakt. Geologie, 1910 pag. 23.

sotterranee fu il dott. Otto Volger. Egli in una conferenza tenuta nel 1877 nel XVIII congresso della società degli ingegneri tedeschi, sostenne che l'aria atmosferica ricca di vapor di acqua penetrando nel suolo ed arrivando nella zona di temperatura più bassa, che non risente delle variazioni prodotte dal riscaldamento solare, ivi si condensi.

Alla obiezione mossagli perchè mai le sorgenti scorrano abbondanti dopo le grandi piogge, egli rispose dimostrando che, come un forte contenuto di vapor d'acqua nell'aria e una rapida diminuzione di temperatura determinino la formazione delle nubi e poi la pioggia, così anche nel sottosuolo si ha una condensazione, che fa aumentare le acque sotterranee.

La teoria del Volger ebbe subito Hahn e Wolluny avversari, ma da recente il König ⁽¹⁾ e l'Haedicke ⁽²⁾ l'hanno rievocata, ed è merito specialmente di quest'ultimo di averla avvalorata con degli esperimenti. Haedicke ha dimostrato in pubblica conferenza che un cilindro di vetro contenente mezzo litro di sabbia perfettamente asciutta e tenuta a 7° C., mentre la temperatura dell'ambiente ove operava era di 10° C., ha permesso di ricavare in un'ora 4 grammi di acqua proveniente dalla condensazione del vapor d'acqua che man mano è penetrato nella sabbia per diffusione.

Keilhack ⁽³⁾ nel suo interessante *Lehrbuch der Grundwasser und Quellenkunde* espone in una tabella la quantità di vapore d'acqua che può esser contenuta in un metro cubo d'aria a diversa temperatura: a 10° l'aria contiene gr. 9,4 d'acqua, a 15 gr. 12,7 ed a 25° gr. 22,8. Cosicchè un abbassamento di temperatura da 15° a 10° C. produce la condensazione di gr. 3,3 d'acqua.

Se dunque in mezzo litro di sabbia, che può contenere circa 200 cm.³ d'aria, si condensano gr. 4 di acqua in un'ora con un abbassamento di temperatura da 10° a 7°, significa come se attraverso il mezzo litro di sabbia fossero passati metri cubi 2,1 d'aria; intanto nell'aria non si constata alcun movimento; è piuttosto il vapor d'acqua che ha un potere diffusivo grandissimo.

Di recente il prof. Meydenbauer ha dato una spiegazione, la quale permette di riguardare da un punto di vista scientifico diverso il fenomeno della condensazione dell'umidità dell'aria che scende nel sottosuolo. Secondo questo autore ⁽⁴⁾ l'umidità dell'aria non si comporta come un gas, ma è costituita

⁽¹⁾ F. König, *Die Vertheilung des Vassers ueber, auf u. in der Erde und die daraus sich ergebende Entstehung des Grundwassers u. seiner Quellen mit einer Kritik des bisherigen Quellentheorien*. Iena, 1901.

⁽²⁾ H. Haedicke, *Die Entstehung des Grundwassers*. Bayr. Industrie und Gewerbeblatt, 1907.

⁽³⁾ K. Keilhack, *Lehrbuch der Grundwasser- und Luellkunde*. Berlin, 1912, pag. 92.

⁽⁴⁾ Meydenbauer, *Die Entstehung des Grundwassers*. Zeitsch. d. Verbandes deutscher Architekten und Ingenieur-Vereine. Jahrg. 1, nr. 5, 1912, pag. 41.

da sferoline di acqua (Dunstbälle) il cui diametro varia da mm. 0,02 a mm. 0,006.

Le sferoline d'acqua, per effetto di repulsioni reciproche, rimangono libere nell'aria e con essa penetrano nel suolo, ivi aderiscono alla superficie delle singole particelle del terreno, e se queste sono molto accostate le sferoline possono toccarsi e raccogliersi in fluida acqua. Secondo questa spiegazione la temperatura non avrebbe alcuna influenza sul fenomeno della condensazione sotterranea, che piuttosto dipenderebbe dalla quantità e dalla grossezza delle sferoline sospese nell'aria e dalla grandezza degli interstizi che ha il terreno permeabile. La teoria del Meydenbauer apre un campo nuovo di ricerche specialmente su quanto riguarda l'influenza che ha la struttura delle rocce nella condensazione. Tante osservazioni, alle quali sin'oggi si era dato poca importanza vengono a portare gran luce sull'interessante problema. Per esempio è noto a chiunque il fatto che alcune rocce adoperate per la costruzione degli edifici hanno la proprietà di assorbire l'umidità dell'aria, mentre altre nello stesso ambiente, pur essendo della stessa natura, solo perchè hanno struttura diversa, rimangono asciutte. I tufi vulcanici più di qualunque altra roccia hanno un potere condensante straordinario e ciò, con la teoria di Meydenbauer, si spiegherebbe ammettendo che gli interstizi di questa roccia sono tali che le piccolissime sferoline di vapor d'acqua penetranti nel sottosuolo possono venire in contatto fra di loro, accumularsi e dar luogo alla vena liquida.

L'esame microscopico di tali rocce conforta tale ipotesi: i granellini sono porosi e sono separati l'uno dall'altro da piccoli interstizi.

Se si tiene presente che la zona dell'Etna più ricca di acque sotterranee è quella sud-orientale, ove sotto le colate di lava si riscontrano estesi strati di tufo fra i quali si rinvencono tali acque è importante vedere d'onde esse traggano origine.

L'Etna sorse fra i terreni post-pliocenici quando essi non erano ancora del tutto emersi, e ciò viene provato dal fatto che i torrenti, i quali scendevano dai monti Peloritani e da Troina verso il grande golfo Preetneo portando ciotoli e detriti venivano a depositarsi nel mare con i depositi delle deiezioni vulcaniche delle prime grandi conflagrazioni dell'Etna.

Dalle osservazioni fatte nei vari pozzi e cunicoli eseguiti sul versante di Aci dalla Società delle Acque di Casalotto per la ricerca di nuove acque, si è potuto accertare che al disotto dei banchi di lava si trovano gli stessi tufi con impronte di foglie di mirto e di alloro che si riscontrano alla Licatia e al Fasano presso Catania. Questi tufi si estendono fino al mare ove nella balza di Aci son messi allo scoperto in sezione naturale. Le lave ed i tufi che si succedono con lo stesso ordine nei pozzi della pianura di Aci S. Antonio, nei pozzi dell'altra pianura sottostante di Aci Catena e nella balza in riva al mare fanno ritenere che due faglie parallele alla spiaggia

si siano formate nel vessante di Aci e per conseguenza due gradini, uno lambito dal mare nella balza di Aci l'altro a circa 3 chilometri nella balza di Aci Catena.

Or è importante fare notare che lungo tali faglie e precisamente fra i tufi scorrono abbondanti masse di acqua, dei veri fiumi sotterranei, che la mitologia aveva personificato in Acis l'infelice amante di Galatea, il quale, oppresso sotto i macigni del vulcano, rapido e furtivo veniva a confondersi fra le onde del mare. Queste acque limpidissime che tengono in soluzione i soli elementi mineralizzanti forniti dalle rocce vulcaniche dell'Etna, in seno alle quali esse hanno origine e scorrono, non risentano alcuna influenza delle acque piovane.

Ciò è stato dimostrato dalle ricerche chimiche fatte continuamente per circa un anno alle acque sotterranee del versante di Aci⁽¹⁾. Le acque piovane che dopo l'eruzione del 1911 venivano saturate dagli abbondanti sali solubili sparsi sulle falde dell'Etna, non arrivarono a penetrare fino al livello delle acque sotterranee. Questa osservazione altrettanto decisiva quanto essa è semplice non può, fino a prova in contrario permettere di spiegare l'origine delle acque sotterranee del versante orientale dell'Etna con la teoria del Mariotte, mentre quella del Meidenbauer vi trova delle conferme.

È un fatto bene accertato che in Sicilia nelle annate di generale siccità le sorgenti sono state povere di acqua, ma si è pure constatato che nelle annate in cui sul versante orientale dell'Etna si è avuta scarsissima pioggia, come risulta dai dati pluviometrici di Acireale, di Catania e dell'Osservatorio Etneo, le sorgenti non sono diminuite quando la mancanza di pioggia è stata supplita da una notevole umidità nell'aria. Certo questa osservazione merita delle conferme, ed è da sperare che sul versante orientale dell'Etna vengano fatte delle misure dirette dello stato igrometrico dell'aria e della quantità di acqua precipitata, in rapporto con la portata delle sorgenti.

D'altro canto se le indagini storiche permettono di accertare che le sorgenti d'acqua ai piedi dell'Etna erano più abbondanti quando il vulcano era tutto rivestito di folti boschi, migliore spiegazione di ciò si potrebbe avere ammettendo la teoria della condensazione anzichè quella delle acque infiltranti.

Un terreno imboschito offre una maggiore superficie evaporante di un terreno ignudo, tanto che se le piogge sono di breve durata non arrivano ad inumidire il suolo; e si pensi ancora che le piante assorbono una grande quantità di acqua dal terreno, per esempio un bosco di querci assorbe dal suolo circa 250 mm. di acqua in un anno.

⁽¹⁾ G. Ponte, *Sulla indipendenza delle acque sotterranee dell'Etna dalle precipitazioni atmosferiche*. Rend. Accad. dei Lincei, vol. XXII, ser. 5^a, pag. 502.

Le precipitazioni atmosferiche sull'Etna oscillano intorno ai 600 mm. di pioggia all'anno, e siccome soltanto il 20 % dell'acqua caduta penetra nel terreno arriverebbero nel sottosuolo dell'Etna appena 125 mm. d'acqua piovana, la metà di quanto già ne consuma un bosco di querci; or si domanda da dove potrebbero trarre l'acqua necessaria le rigogliose querci dell'Etna non ammettendo la teoria della condensazione?

Secondo la vecchia teoria dell'infiltrazione l'imboschimento sarebbe dannoso alle sorgenti perchè gli alberi non solo assorbono acqua dal terreno ma, con le loro folte chiome, le quali offrono una estesa superficie evaporante, rimandano all'atmosfera tutta l'acqua caduta durante una pioggia di breve durata.

Sotto le folte chiome d'un bosco l'umidità è permanente anche quando l'aria esterna è molto asciutta. Una zona di umidità si mantiene sul terreno imboschito, dovuta in gran parte al fatto che le correnti d'aria difficilmente possono penetrare una fitta boscaglia. Questa zona di permanente umidità è quella che determina il regolare regime delle sorgenti poichè una regolare massa di vapore penetra continuamente nel sottosuolo sino alla zona di condensazione.

Questa nuova spiegazione permetterà di sostenere scientificamente la esatta quanto antica massima che si rammenta sempre al popolo con la celebre frase dell'Humboldt: Atterrando le selve sulla cima e sui fianchi delle montagne gli uomini lasciano alle generazioni future due grandi calamità insieme, la penuria di legname e di acqua.

Geologia. — *Sulla Geologia dei dintorni di Tobruk.* Nota di C. I. MIGLIORINI, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Fisiologia. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico.* Nota I dei dottori G. QUAGLIARIELLO ed E. D'AGOSTINO, presentata dal Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Patologia. — *I così detti ascessi di Dubois, secondo gli studi sulla rigenerazione del timo dei mammiferi* (¹). Nota preventiva del dott. FRANCESCO FULCI, presentata dal Socio E. MARCHIAFAVA.

I così detti *ascessi di Dubois* del timo, noti già da tempo e considerati da molti come espressione patognomica dell'infezione luetica, può dirsi abbiano determinato nei vari autori, che li hanno studiato, un accordo ed un disaccordo, notevole l'uno quanto l'altro.

L'accordo deriva dalla constatazione accurata e serena del reperto anatomico, per cui le varie descrizioni, e specialmente le recenti, poco differiscono le une dalle altre. Il disaccordo comincia quando dai dati di fatto osservati si vuole risalire al meccanismo genetico di essi.

La presenza infatti di cellule epiteliali appiattite, disposte spesso in vario ordine di strati, nel rivestimento interno della parete della cavità, così detta ascessuale, ha richiamato in modo particolare l'attenzione degli studiosi, come uno dei fatti più importanti e caratteristici, chè in estensione così notevole non si riscontrano certo nel timo, almeno in condizioni normali.

E la spiegazione della genesi di quelle formazioni, dovendo specialmente rendere conto della presenza di questi epiteli piatti stratificati, che senza limiti netti si continuano perifericamente con elementi di aspetto linfoide, ha incontrato difficoltà e provocato il succedersi di numerose ed anche geniali ipotesi, avvalorate spesso dalla conferma di qualcuno o smentite dalle critiche severe di altri.

Fra le teorie esposte, due però sono quelle che si sono maggiormente affermate:

l'una, che dà a queste formazioni il significato di arresti di sviluppo, per cui le cellule epiteliali stratificate, rivestenti la cavità sarebbero residuo di quelle che originariamente tappezzavano il lume dell'abbozzo timico primitivo;

l'altra, che riconduce la genesi di queste formazioni ad una vera e propria immigrazione del tessuto timico nell'interno dei corpuscoli di Hassal, i quali perciò vengono dilatati, mentre poi gli elementi immigrati andrebbero incontro alla necrosi, costituendo il detritus, amorfo, purisimile, che si riscontra nell'interno di esse.

Secondo questa seconda ipotesi, emessa già dal Chiari e da molti autori condivisa, l'epitelio piatto di rivestimento non sarebbe quindi altro

(¹) Lavoro fatto nell'Istituto patologico dell'Università di Freiburg i Br. diretto dal Geheimrath prof. L. Aschoff.

che il residuo delle cellule epiteliali piatte degli strati più esterni dei corpuscoli di Hassall, infiltrati e straordinariamente ingranditi.

Non discuto ora, per brevità, queste due principali teorie, che, se possono in certo modo spiegare una parte del reperto anatomico, non sono però sufficienti per fare comprendere il resto.

Nello studio della rigenerazione del timo dei mammiferi, raramente nei conigli, ma, e specialmente, nei cani, io sono qualche volta rimasto sorpreso dall'osservazione di formazioni, che potevano anatomicamente essere avvicinate a quelle descritte nell'uomo, come ascessi di Dubois e che in questi casi dovevano essere ritenute secondarie alla necrosi dei frammenti di tessuto timico, residuale alla timectomia parziale.

Infatti nei pezzi di timo, asportati precedentemente per studiare il meccanismo rigenerativo dell'organo, mai mi era stato dato di rilevare formazioni consimili: il timo si era presentato in questi casi perfettamente normale.

Ora queste particolari formazioni lasciano riconoscere una parete ed una cavità centrale.

La cavità ha un aspetto vario: rotondeggiante, ovoidale, o con piccole ed irregolari sinuosità laterali, ora alquanto superficiali, ora più profonde. Il lume non ne è mai vuoto, ma riempito, più o meno completamente, da una sostanza omogenea, ialina, piuttosto uniformemente colorata dall'eosina, nella quale potevano talora riconoscersi residui dei primitivi corpuscoli di Hassall, in forma di piccole formazioni concentriche, debolmente colorate.

Tale massa omogenea è sovente, ma scarsamente, infiltrata da leucociti mono, e polinucleati e da cellule a nucleo grande pallido, con nucleolo distinto e con protoplasma ampio, rotondeggiante, vescicoloso [*Degenerationszellen*] (¹). Qua e là irregolarmente sparsi sono residui di carioressi nucleare.

Talora nei casi osservati pochi giorni dopo la timectomia (ad es. in un cane (18^{mo} di protocollo) ucciso diciotto giorni dopo la timectomia parziale) la sostanza che riempiva la cavità era di aspetto quasi ialino verso la periferia, ma al centro presentava ancora emazie, piuttosto bene conservate. Le *Degenerationszellen* erano assai abbondanti.

La parete presenta in genere elementi di rivestimento di aspetto alquanto diverso negli strati più interni, rivolti verso il lume ed in quelli più esterni.

Gli strati più interni sono costituiti da elementi di aspetto epiteliale, a nucleo grande, piuttosto pallido, con nucleolo bene distinto e membrana nucleare sottile, ma evidente: nucleo ovoidale, ma più spesso allungato in senso trasversale.

(¹) Fulci, Deut. med. Wochen, 1913, n. 37; Centralbl. f. allg. Patholog. und pathol. Anatom., 1913, S. 968.

Il protoplasma è relativamente ampio ovoidale, ma più spesso appiattito in senso lineare, così che l'elemento assume l'aspetto di un epitelio piatto.

Talora è piuttosto alto, e sporgente nell'interno del lume stesso. Il margine libero di questi epiteli ora è bene delimitato; ora invece è come ricoperto dalla massa del contenuto; ora addirittura indistinto, come se le cellule più interne del rivestimento della parete si continuassero con il contenuto ialino della cavità stessa.

Queste cellule epiteliali appiattite, che talora quasi a guisa di propagini, variamente dirette, si spingono nel lume della cavità sono disposte in vario ordine di strati, onde in alcuni punti la cavità può ben dirsi delimitata come da un epitelio piatto, pluristratificato.

Fra queste cellule epiteliali, morfologicamente riconducibili a quelle che io ho già indicato con il nome *Mutterzellen* ⁽¹⁾, si notano spesso elementi dai caratteri istologici riferibili a quelli da me descritti per le *Degenerationszellen*.

Verso gli strati più esterni le cellule divengono sempre più piccole, il nucleo più ricco di cromatina, più scuro, il nucleolo meno distinto, il protoplasma più stretto, rotondeggiante, piuttosto basofilo.

Senza alcun limite netto dalle cellule grandi epiteliali appiattite si passa, per una serie di forme intermedie, a cellule di aspetto linfoide, linfocitosimili, degli strati più esterni. Le quali verso l'esterno si presentano, a guisa di noduli rotondeggianti, limitate da un tessuto connettivale lasso, variamente provvisto di nuclei, ma in genere povero di essi.

Fra le cellule di aspetto linfoide degli strati più esterni, non si notano in genere corpi di Hassal.

La parete della cavità, così costituita, per la presenza delle grandi cellule epiteliali, chiare situate verso l'interno, dalle quali senza limiti precisi, ma per gradi, attraverso numerose forme intermedie, si passa, verso la periferia, alle cellule linfocitosimili, ricorda uno di quegli stadi (il secondo) che io ho descritto nella rigenerazione dell'organo ed indicato con il nome di *timo invertito*.

In questi casi dalle cellule epiteliali, dalle *Mutterzellen*, primitivamente originatesi attorno alla massa necrotica, centralmente disposta, si era avuta la produzione, in senso centrifugo, di cellule di dimensioni sempre più piccole, sino alle linfocitosimili degli strati più esterni.

In questi casi però le cellule epiteliali degli strati più interni, avevano un aspetto alquanto più appiattito, meno ovoidale o cilindrico, delle solite *Mutterzellen*, sebbene il resto dei caratteri morfologici ad esse le identificasse.

(1) Fulci, lavori già citati.

Mentre mi riserbo di ritornare più diffusamente sull'argomento nel lavoro completo, credo pertanto opportuno rilevare che per effetto della necrosi e della rigenerazione del tessuto timico si possono ottenere negli animali da esperimento (e specialmente nei cani) delle formazioni particolari, analoghe ai così detti ascessi di Dubois, che sono stati ripetutamente descritti nell'uomo e considerati, quasi, come patogenomici della infezione sifilitica, specialmente congenita.

Batteriologia agraria. — *Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno.* Nota di C. LUMIA, presentata dal Socio G. CUBONI.

Nel 1902, in una breve Memoria pubblicata sul periodico *Le Stazioni sperimentali agrarie italiane* (vol. XXXV, fasc. VII), affermai il concetto che i concimi minerali esercitano un'azione diretta sui microrganismi del terreno; che la concimazione potevasi considerare come l'apparecchiamento dell'ambiente chimico culturale dei microbi del terreno, e che infine questi coi loro resti e con le loro specifiche funzioni concorrono in larga misura alla vita delle piante coltivate. Dopo il 1902 molte ricerche attinenti alla mia tesi furono eseguite, sia all'estero che in Italia; e fra queste ultime, notevoli quelle fatte dal dottor R. Perotti sulla solubilizzazione biochimica dei fosfati del terreno. Incoraggiato dall'esito di codeste ricerche, volli, lo scorso anno, illustrare meglio il mio concetto in una Memoria che fu presentata alla R. Accademia dei Lincei, dal Socio professore Pirotta, direttore dell'Istituto botanico di Roma, ed esaminata da apposita Commissione, composta dei Soci professori Cuboni e Menozzi. Questa Commissione, mentre mi concedeva l'alto onore di proporre l'accoglimento della Memoria, osservava che nel lavoro mancava la parte sperimentale; ond'io credetti opportuno di fare omaggio all'indicato giudizio, istituendo una serie di ricerche, al fine di dimostrare sperimentalmente l'azione dei concimi minerali sull'attività dei microrganismi del terreno.

Con questa prima Nota dò conto delle esperienze riguardanti l'azione dei concimi minerali sull'attività dei *Saccaromiceti*, che sono, come è noto, tanto diffusi nel terreno, dove possono compiere azioni solutive di notevole importanza, specialmente quando si sotterrano erbe verdi (Sovesci).

Numerosi lavori analitici e sintetici esistono intorno ai saccaromiceti, e specialmente sul *Saccharomyces cerevisiae*. Però il Duclaux, nel suo *Traité de microbiologie*, Paris 1900, dopo di avere citati ed in parte descritti i lavori di Payen, Béchamp, Liebig, di Adolfo Mayer (1869 e 1871), di Salamon e Mathew (1884), di Elion (1893), di Kusserow (1887), e di Stern (1898) così scrive: « Da ciò che precede si vede che noi sappiamo ancora troppo

poco sulla nutrizione minerale del lievito di birra ». Ed il Lafar, *Handbuch der Technischen Mycologie*, vol. IV, 1905-1907, pag. 88, asserisce che le esperienze sulla nutrizione minerale dei fermenti alcoolici vanno ripetute. Ed egli non ha torto, quando si pensi che il citato Kusserow (Bremerei Zeitung 1897) afferma che una aggiunta di fosfato potassico al mosto di birra non ha efficacia notevole sulla fermentazione alcoolica; ed aggiunge *che nelle prove fatte non si potè giudicare isolatamente l'efficacia della potassa perchè fu sperimentata insieme con l'acido fosforico* (Lafar cit., vol. IV, pag. 86).

Infine ricordiamo, per ragioni di affinità, gl'importanti lavori di Harden e Young (1905-1909), di Jwanoff (1907-1908) e di Lebedew (1909-1910) ⁽¹⁾ i quali mirano a spiegare come si esplica l'azione dei fosfati solubili sulla fermentazione alcoolica ottenuta con la sola zimasi, in ambiente sterile. Ma è uopo notare che l'azione del lievito vivente è circa 40 volte maggiore di quella d'una quantità *equivalente* di succo di lievito ⁽²⁾, e quindi, ai fini del mio lavoro, mi interessava studiare il comportamento del lievito vivente.

Or le ricerche fatte riguardano la batteriologia generale e non la batteriologia agraria, mentre a me premeva di constatare il comportamento dei concimi minerali in uso oggidì rispetto all'azione, già parzialmente sperimentata, del fosfato bipotassico. Inoltre, a me premeva di trovare un metodo di sperimentazione che mi permettesse di seguire, passo passo, l'azione delle sostanze minerali, al qual fine non si prestano i metodi adoperati da tutti gli altri sperimentatori, cioè la determinazione per pesata della CO₂ sviluppata (metodo Meissl), ovvero la determinazione dell'alcool prodotto e del residuo zuccherino. Invece il metodo da me adottato, cioè la fermentazione entro tubi capovolti sopra bagni a mercurio, come indica l'unita figura, riesce perfettamente allo scopo e dà la percezione oculare diretta dell'azione che le sostanze minerali producono con la loro presenza o con la loro assenza sull'attività microrganica. Anzi credo di poter consigliare a scopo dimostrativo il detto metodo di sperimentazione alle Scuole di chimica e batteriologia agraria, perchè con esperienze così condotte si dà modo ai discendenti di acquistare il convincimento della sensibilità estremamente grande dei microbi alle minime variazioni dell'ambiente chimico culturale.

Nelle mie esperienze feci uso di lievito di birra, quale si adopera nella panificazione, perchè qualunque specie del genere *Saccharomyces* era buona ai fini delle mie ricerche; e tenuto conto del fatto, che parecchie sono le specie di lieviti che si trovano promiscuamente presenti nel terreno.

Prima di dare un esatto resoconto delle esperienze da me seguite, credo opportuno di far notare, che, nelle ricerche intese a stabilire se una data sostanza sia o pur no indispensabile per la vita dei lieviti alcoolici, ha una

⁽¹⁾ Vedasi la bibliografia in Arthur Harden: *La fermentation alcoolique*, Paris, A. Hermann et fils, 1913.

⁽²⁾ V. Harden, op. cit., pag. 34.

grande importanza la quantità di lievito stesso che si adopera; giacchè, se il lievito è in forte quantità, si viene a portare nel liquido di coltura col lievito stesso una dose sensibile di quei materiali sui quali si vuole sperimentare; ed allora non risultano notevoli le differenze che presentano sul tubo di controllo gli altri tubi. Se la quantità di lievito è eccessivamente piccola, si hanno fermentazioni deboli e di lunga durata. Pertanto, con una numerosa serie di esperienze preliminari, delle quali non è qui necessario di dar conto, ho determinata la quantità più opportuna di lievito da impiegare; come pure ho stabilito il titolo zuccherino più rispondente allo scopo ed alla capacità dei tubi disponibili. Si nota infine, che i lieviti adoperati nelle successive esperienze non erano, nè potevano essere, egualmente freschi; epperò i risultati delle successive prove non sono fra di loro in maniera assoluta confrontabili, ma sempre abbastanza chiari e netti per poterne dedurre delle conclusioni di valore indubbio.

Esperienza I. Ho preparata e poscia fatta bollire una soluzione nutritiva priva di acido fosforico e di potassa, come è qui indicata:

Acqua distillata	cc.	1000,000
Glucosio chimicamente puro	gr.	40,000
Acido tartarico	id.	6,000
Cloruro di calcio	id.	0,100
Solfato ammonico	id.	10,000
Solfato di magnesio	id.	0,300
Cloruro di sodio	id.	0,100
Cloruro ferrico	id.	0,010

In 100 cc. della detta soluzione ho emulsionato otto decigrammi di lievito di birra, e poscia ho allestiti tre tubi a mercurio di circa cc. 60 di capacità, ma graduati fino a cc. 50.

Nel tubo N. I ho posti: cc. 5 della detta soluzione nutritiva più mg. 6 di fosfato bipotassico (uno per mille del complessivo liquido colturale), più cc. 1 di emulsione di lievito, preparata come sopra è stato detto.

Nel n. II ho posti: cc. 5 della soluzione c. s. più mg. 6 di solfato di potassio, più mg. 4,4 di fosfato monocalcico asciutto (quantità equimolecolari del fosfato bipotassico del tubo I), più cc. 1 di emulsione di lievito.

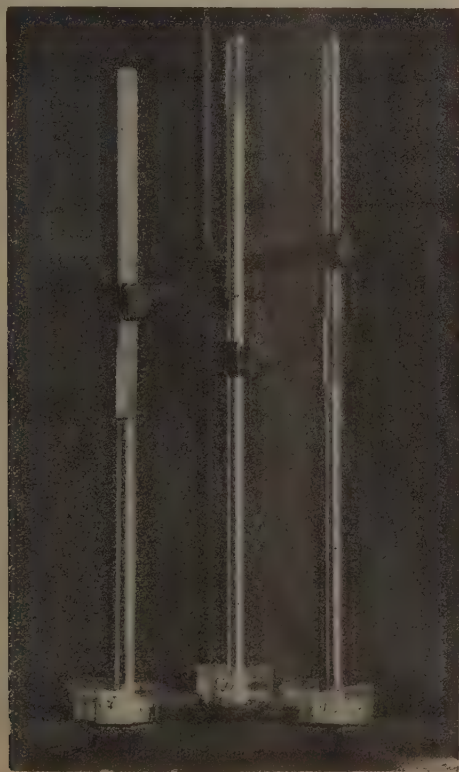
Nel n. III (controllo) ho posto: cm. 5 della soluzione come sopra, più cc. 1 della emulsione di lievito.

Collocati i tre tubi nel termostato a 28° C.

Ecco i risultati ottenuti:

	Volumi non corretti della CO ₂ sviluppatasi in cc.		
	I Con fosfato bipotassico	II Con fosfato monocalcico e solfato potassico	III Controllo
18 febbraio 1914, ore 18	—	—	—
19 " " " 11	7,2	6,2	0,3
20 " " " 11	17,6	16,1	0,5
21 " " " 11	22,8	21,8	0,8
22 " " " 11	26,9	25,8	1,2
23 " " " 11	30,5	29,6	1,8
25 " " " 11	34,0	33,0	2,6
26 " " " 11	35,6	34,6	3,0
27 " " " 10	36,8	35,9	3,4

Alle ore 10 del 27 febbraio furono ritirati i tubi dal termostato per eseguire altra prova. I tubi, di cui alla precedente esperienza, vennero fotografati il giorno 22 e la fotografia è riprodotta dalla seguente figura:



Esperienza II. Ho allestiti i tre seguenti tubi:

Nel tubo n. I ho posti: cc. 5 della solita soluzione più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 4,4 di fosfato monocalcico perfettamente asciutto, più cc. 1 di emulsione di lievito preparata come nella prima prova.

Nel n. II. cc. 5 di soluzione più mg. 4,4 di fosfato monocalcico, più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. III, cc. 5 di soluzione più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 5,4 di fosfato tricalcico, più cc. 1 di emulsione di lievito. Messi i tre tubi in termostato il 27 febbraio, alle ore 12. Eccone i risultati:

		Volumi non corretti della CO ₂ sviluppatasi, in cc.		
		I Fosfato monocalcico e solfato potassico	II Fosfato monocalcico	III Fosfato tricalcico e solfato potassico
27 febbraio, ore 12 . . .		—	—	—
" " " 17 . . .		0,4	0,3	0,4
28 " " 11 . . .		10,2	0,5	10,0
1 marzo " 11 . . .		22,1	2,1	18,7
2 " " 11 . . .		27,4	3,1	23,1
3 " " 11 . . .		31,9	4,1	27,3
4 " " 11 . . .		35,1	4,9	30,1
5 " " 11 . . .		37,5	5,5	32,0
6 " " 10 . . .		39,3	5,9	34,0

Esperienza III. Ho allestiti con la solita soluzione i tre seguenti tubi:

Nel n. I. ho posti: cc. 5 della soluzione, più mg. 6 di solfato potassico, più cc. 1 di emulsione di lievito c. s.

Nel n. II. ho posti: cc. 5 di soluzione, più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 16 di scorie Thomas al 18 % di P₂ O₅, più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. III. ho posti: cc. 5 di soluzione, più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 5,3 di fosfato bicalcico, più cc. 1 di lievito.

Collocati i tre tubi in termostato a 28° il dì 6 marzo alle ore 12. Ecco i risultati della prova:

	Volumi non corretti della CO ₂ sviluppatasi in cc.		
	I Solfato potassico	II Solfato potassico e scorie Th.	III Solfato di potassio e fosfato bicalcico
6 marzo, ore 12	—	—	—
7 " " 11	1,5	33,5	30,0
7 " " 18	2,1	40,5	35,9
8 " " 11	4,3	47,2	41,7
9 " " 11	7,1	49,5	46,0
10 " " 11	8,7	50,2	48,2
11 " " 11	10,2	—	—
12 " " 11	11,6	—	—
13 " " 11	12,2	—	—

Il giorno 10 alle ore 11, ritirati dal termostato i tubi 2 e 3 perchè si era esaurita la graduazione; il 13 alle ore 11 ritirato anche il tubo 1 per eseguire la successiva prova.

Esperienza IV. Ho preparati, nel modo consueto, tre tubi:

Nel n. I, ho posti: cc. 5 della soluzione solita più mg. 6 di fosfato bipotassico, più cc. 1 di emulsione di lievito c. s.

Nel n. II, cc. 5 di soluzione c. s. più mg. 24 di perfosfato minerale al 15 % di P₂ O₅, più mg. 6 di solfato potassico, più cc. 1 di lievito c. s.

Nel n. III, cc. 5 di soluzione c. s. più mg. 24 di perfosfato minerale, più mg. 24 di leucite polverizzata di Civita-Castellana, contenente il 13 % di K₂O.

Posti i tre tubi in termostato a 28°. Risultati:

	Volumi non corretti della CO ₂ sviluppatasi in cc.		
	I Fosfato bipotassico	II Perfosfato e solfato potassico	III Perfosfato e leucite
13 marzo, ore 12	—	—	—
14 " " 11	21,5	7,4	6,7
15 " " 11	33,1	8,8	7,9
16 " " 11	38,4	8,8	7,9
17 " " 9	43,5	9,2	8,2

Ho ritirati i tubi dal termostato alle ore 9 del 17 marzo per eseguire la quinta esperienza.

Esperienza V. Ho allestiti i tre seguenti tubi.

Nel n. I, ho posti: cc. 5 di soluzione più mg. 5,4 di fosfato neutro di calcio, più mg. 24 di leucite macinata c. s., più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. II, ho posti: cc. 5 di soluzione più mg. 12 di perfosfato al 15 % di P_2O_5 , più mg. 6 di solfato potassico, più 1 cc. di emulsione di lievito c. s.

Nel n. III, cc. 5 di soluzione più mg. 24 di perfosfato come sopra, più mg. 15 di carbonato di calcio in polvere, più mg. 6 di solfato potassico, più 1 cc. di lievito c. s. Il liquido di questo tubo si è fortemente agitato fino a scomparsa di sviluppo gassoso.

Posti i tre tubi in termostato a 28° il 17 marzo alle ore 12. Eccone i risultati:

	Volumi non corretti della CO_2 sviluppatasi in cc.		
	I Fosfato tricalcico e leucite	II Perfosfato e solfato potassico	III Pe fosfato carbonato di calcio e solfato potassico
17 marzo, ore 12	—	—	—
17 " " 18	0,1	0,1	2,2
18 " " 11	0,3	0,2	19,8
19 " " 11	0,4	0,3	32,8
20 " " 11	0,4	0,3	38,8
21 " " 11	0,4	0,3	42,6
22 " " 11	0,4	0,3	44,5
23 " " 11	0,4	0,3	46,9
24 " " 11	0,4	0,3	48,4

Esperienza VI. Preparati due tubi:

Nel n. I, ho posti: cc. 5 della solita soluzione più mg. 16 di scorie c. s., più mg. 5 di cloruro potassico, più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. II, ho posti: cc. 5 di soluzione c. s., più scorie mg. 16, più solfato potassico mg. 6, più cc. 1 di emulsione di lievito.

Collocati i due tubi in termostato a 28° il 24 marzo, alle ore 11. Ecco i risultati ottenuti:

	Volumi non corretti della CO ₂ sviluppatasi in cc.	
	I Scorie e cloruro di potassio	II Scorie e solfato di potassio
24 marzo, ore 11	—	—
24 " " 18	6,2	6,8
25 " " 11	31,0	32,0
25 " " 18	35,2	36,2
26 " " 18	46,0	47,0
27 " " 10	50,5	51,0

CONCLUSIONI:

1°) Se nell'ambiente chimico culturale dei fermenti alcoolici manca l'acido fosforico (tubo 1°, esp. III), ovvero la potassa (tubo 2, esp. II) o l'anione ed il catione insieme (tubo 3, esp. I), è nulla l'attività dei fermenti stessi.

2°) Il fosfato monocalcico, componenté primo dei perfosfati, ed i fosfati bicalcico e tricalcico, componenti accessori dei detti concimi, agendo insieme col solfato potassico, esplicano un'azione quasi identica a quella spiegata dal fosfato bipotassico (tubo 2 dell'esp. I; tubi 1 e 3 dell'esp. II e 3 dell'esp. III).

3°) Le scorie del Thomas sono un alimento fosfatico utilissimo per il lievito alcoolico (tubo 2, esp. III; e tubi 1 e 2 dell'esp. IV).

4°) I perfosfati, forse a causa dell'acido solforico libero che contengono, impediscono lo sviluppo della fermentazione (tubo 2, esp. IV) e tubo 2, esp. V). Invece essi riescono un utilissimo alimento fosfatico quando agiscono in presenza del carbonato di calcio (tubo 3, esp. V). Quindi, nei riguardi dei lieviti alcoolici, non è da raccomandarsi l'uso dei perfosfati nei terreni privi di calcare e di altri carbonati.

5°) Il cloruro potassico esercita un'azione analoga a quella del solfato potassico (tubo 1, esp. VI).

6°) La leucite macinata di Civita-Castellana è inerte per il lievito alcoolico in presenza di fosfato tricacico (tubo 1, esp. V).

7°) Il fermento alcoolico potrebbe costituire un prezioso mezzo diagnostico per determinare l'assimilabilità comparativa dei materiali insolubili dei concimi e dei terreni.

8°) Il metodo di sperimentazione da me proposto per la fermentazione alcoolica potrà servire per ulteriori ricerche intese a determinare le condizioni tutte dell'ambiente chimico e l'azione di quantità crescenti dei diversi

materiali. Le quantità di CO_2 che si sviluppano, si possono facilmente ridurre a zero ed alla pressione normale.

* * *

Pervenuto alla fine della presente Nota, compio il dovere di ringraziare vivamente il chiarissimo professore Giuseppe Cuboni, il quale con la sua consueta e larga ospitalità mi ha permesso di eseguire le presenti ricerche presso la R. Stazione di Patologia vegetale da lui degnamente diretta.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica. La raccolta del secreto prostatico del cane.* Nota di G. AMANTEA, presentata dal Socio LUCIANI.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria.* — III. *Proprietà chimico-fisiche dei liquidi interni delle rane escul. estive tenute in acqua distillata ed in soluzioni Ringer ipertoniche.* — IV. *Il tempo entro il quale la regolazione osmotica avviene.* Note di B. BRUNACCI, presentate dal Socio L. LUCIANI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

SERRA. *Rocce vulcaniche della Sardegna centro-occidentale.* Pres. dal Socio STRUEVER.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Vengono approvate dalla Classe per l'inserzione negli Atti accademici, salvo le consuete riserve del Consiglio di Amministrazione, le seguenti Memorie, in seguito a parere favorevole delle sottonotate Commissioni:

I. BLASERNA, relatore, e VOLTERRA. Sulla Memoria del dott. G. GIANFRANCESCO: *Per lo studio del Corista campione dell'Ufficio centrale italiano.*

2. MATTIROLO, rel., e PIROTTA. Sulla Memoria del dott. R. PEROTTI: *Studi di biologia sopra l'Agro romano in rapporto al suo bonificazione agrario.*

3. GRASSI, rel., e PIROTTA. Sulla Memoria del prof. C. ACQUA: *Osservazioni ed esperienze sul filugello.*

4. GRASSI, rel., e TODARO. Sulla Memoria del dott. L. SANZO: *Stadi larvali di Bathophilus nigerrimus* Gigl.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte del Socio straniero prof. EDOARDO SUESS, avvenuta il 26 aprile 1914; apparteneva il defunto Socio all'Accademia per la *Geologia e Paleontologia*, sino dal 2 dicembre 1883.

Il Socio B. GRASSI legge la seguente Commemorazione del Corrispondente marchese GIACOMO DORIA.

Quando il nostro Presidente diede il triste annuncio della scomparsa di Giacomo Doria, io non ho riflettuto, e ne sono dolente, che il Millosevich ed il Della Vedova, a lui legati da lunga consuetudine di lavoro e di amicizia in seno alla Società geografica, avrebbero potuto meglio di me commemorarlo; e ho creduto mio dovere offrirmi spontaneamente a questo pietoso ufficio, considerando che il Doria tignrava tra i Soci della sezione alla quale ho l'onore di appartenere. Assolverò oggi, meglio che potrò, il compito che mi sono assunto, domandando scusa ai due colleghi se non sarà completa la mia esposizione nella parte riflettente la Società geografica.

Le pubblicazioni scientifiche del Doria, che riguardano tutte la zoologia descrittiva e corologica, benchè severamente condotte, son poche, brevi e di non singolare valore. Non è perciò il caso di farne menzione speciale; ricorderò soltanto la sua monografia sui pipistrelli della Liguria, modesta, ma modello del genere. Non è dunque come scrittore di cose zoologiche che il Doria richiama la considerazione dei posterì. Egli, del resto, sembrava sentisse una profonda ritrosia a pubblicare le proprie ricerche.

Altra è la via che l'ha condotto a rendere insigni servigi alla storia naturale e in special modo alla zoologia.

Quando il Doria ha cominciato le sue raccolte zoologiche, i Musei erano ancora tenuti in molto onore anche da parte di coloro che non erano semplici cultori della sistematica; e anzi nel nostro Paese avevano un valoroso

protettore nel più illustre zoologo italiano allora vivente, il De Filippi, di venerata memoria.

Purtroppo però tarpava le ali a qualunque azione in favore di essi la penuria dei mezzi di cui disponeva il nostro Paese, appena risorto e pressato da moltissimi bisogni impellenti.

Se non ostante ciò, già nel 1867, quando aveva appena 27 anni, Giacomo Doria è riuscito ad ottenere che Genova fondasse il Museo civico di storia naturale, ciò si deve all'aver egli offerto in dono tutte le collezioni da lui radunate nella propria casa, e la propria biblioteca, le une e l'altra già ricche, e all'aver aggiunto al dono la promessa di ordinarle, di disporle scientificamente, di accrescerle e di conservarle.

Negli anni successivi la nuova zoologia, che allora si denominava scientifica, cominciò a trascurare quella descrittiva; i Musei furono paragonati a magazzini; chi di essi si occupava, veniva considerato cultore di una scienza di ordine inferiore. Che cosa era accaduto? Questo: che essendo difficile seguire la bandiera del De Filippi sulla quale era scritto *unum facere et alterum non omittere*, veniva abbandonato ciò che sembrava di minor conto, la pura sistematica che appariva di bronzo di fronte alla morfologia che appariva d'oro. Allora rifuse la virtù del Doria, che non si lasciò scuotere nè scoraggiare dagli apprezzamenti poco favorevoli, e continuò imperterrito nella sua opera, non senza di tanto in tanto rivolgere una parola di risposta o anche di rimbroto ai suoi avversari. Così nel 1884 scriveva di essere fermamente persuaso che « la zoologia descrittiva rimane quale fu sempre, il fondamento necessario ed inalterabile di ogni disciplina biologica, e che i progressi e il nuovo indirizzo della filosofia zoologica non dispensano punto i naturalisti, come taluno mostra di credere, dall'obbligo di conoscere e definire correttamente le forme ».

Alcuni anni dopo, nel 1888, al sopra citato lavoro sui « Chirotteri trovati finora in Liguria » faceva precedere un'introduzione nella quale metteva un'altra volta in luce l'importanza dei Musei e della zoologia sistematica, con considerazioni che credo utile qui riportare almeno in parte, perchè valgono anche nell'ora che corre, quantunque dettate da oltre 25 anni.

« Ad onta di tutte le teorie, colle quali si pretenderebbe dimostrare l'inutilità dei Musei e le declamazioni più o meno lepidi dei così detti innovatori della scienza contro gli stabilimenti di simil genere, nessuno può negare che ora più che mai è necessario di radunare ricche serie di quegli animali che si possono conservare in modo riconoscibile, per formarne in certo modo degli Archivi zoologici, i quali in gran parte serviranno, con l'andare degli anni e coll'aiuto degli appunti che si vanno radunando sulla variabilità delle forme e sulla loro area di diffusione, a darci un'idea più esatta della origine e della distribuzione delle specie, nonchè delle modificazioni cui esse vanno soggette. I Musei zoologici sono un'assoluta neces-

sità scientifica, come lo furono e lo saranno sempre gli erbarii di piante secche. Senza il classico erbario di Kew, non avremmo le grandi flore tropicali che si pubblicano in Inghilterra; e senza di essi, la Francia, l'Olanda e la Germania non avrebbero dato alla luce tanti pregevoli lavori botanici ».

« È doloroso a dirsi: ma l'indirizzo degli studi zoologici in Italia ci ha ridotto al punto che, meno rarissime eccezioni, non abbiamo più nè biblioteche da consultare, nè materiali da confronto, per cui fra di noi lo studio delle collezioni diventa sempre più difficile. Infatti, se il nostro stabilimento non avesse comunicato all'estero buona parte del suo materiale, questo sarebbe rimasto indeterminato per metà, a disdoro di chi con tanta fatica lo aveva radunato ».

Dopo di aver citato come esempi meravigliosi i Musei delle altre nazioni, il Doria soggiungeva: « Presso di noi, invece, gente dalla fervida immaginazione, si guarda con mal dissimulata compassione, quasi con disprezzo, chi consacra la propria vita all'ordinamento e allo studio di raccolte sistematiche ».....

« Noi, non solo non aumentiamo le nostre collezioni, ma perdiamo sovente per mancanza di cura quelle che radunarono i nostri antecessori: e ciò spesso in modo brutale così che stringe il cuore. Allorchè ultimamente la più grande collezione ornitologica privata che si conosca, e che è un vero monumento italiano, fu offerta in dono come base di un Museo nazionale, non si trovò il posto di allogarla, e la splendida occasione fu perduta per sempre!...

« Da noi con tanti musei e museini, non siamo in grado di studiare anche convenientemente piccolissime collezioni esotiche ».

Nel 1893 il Doria aggiungeva che « se gli studi faunistici, tassonomici e corologici non furono del tutto dimenticati in Italia, ciò deve in parte (*egli avrebbe potuto aggiungere « in gran parte » !*) all'influenza del Museo civico di Genova ».

Intanto, la suppellettile scientifica del Museo civico di Genova era diventata famosa in tutto il mondo, e già nel 1887 il Doria, alieno da qualunque vanteria, poteva scrivere queste parole: « Io ho potuto in breve radunare un materiale che nessun Museo italiano si può vantare di possedere e che per alcune parti supera le collezioni più ricche d'Europa ».

Tornava sull'argomento nel 1896, coi seguenti periodi: « Il Museo civico di Genova possiede collezioni di tutti i paesi: ma per quanto riguarda la fauna dell'Arcipelago Malese e della Papuasìa, è riconosciuto come uno dei più importanti Istituti del mondo. Le sue collezioni vengono affidate per lo studio ai più valenti specialisti, e perciò sono esattamente nominate ed ordinate. Le sue ricchezze provengono da esplorazioni che per la più gran parte furono compiute da persone dotate di grande attività e di speciale attitudine al raccogliere, e sovente in paesi ancora del tutto ignoti o poco

conosciuti. Da ciò la spettacolosa quantità di specie nuove ed il numero, ugualmente immenso, di *tipi*; fortuna delle più ambite per un Museo.

« Questi *tipi*, di grande aiuto per lo studio della sistematica, vengono frequentemente consultati, e naturalisti di tutti i paesi (e fra questi non pochi appartengono ai principali Musei d'Europa) accorrono al Museo civico, per farne argomento di studio ».

* * *

Tanta altezza aveva toccato il Museo di Genova, perchè il marchese Doria, andando anche molto al di là della promessa fatta all'atto della fondazione, lo aveva materialmente sostenuto con munificenza regale e messo in valore colla pubblicazione degli Annali. Questi annali del Museo civico di Genova furono stampati fino al 34° volume, ossia dal 1870 al 1893, a spese del Doria che non badò a sacrificii perchè fossero nitidamente impressi e ricchi di acconcie illustrazioni, elemento che, come egli scrive, è un efficace corredo di ogni contributo biologico e specialmente zoologico.

A dimostrare la larghezza di vedute del Doria ricorderò che fino ad allora (1893) gli Annali erano stati per tutti gli zoologi, sia italiani sia stranieri, un campo nel quale potevano liberamente produrre i frutti della loro attività scientifica, come fanno fede le Memorie in essi pubblicate da Wiedersheim, da Weissmann, da Gasco, ecc. S'intende che la parte principalissima era dedicata allo studio dei preziosi materiali raccolti nella Malesia, nella Papuasìa e nell'Africa, dalle spedizioni scientifiche di Beccari, di L. M. D'Albertis, di Doria, di Antinori, di E. D'Albertis ed altri, spedizioni in gran parte ideate e preparate fra le pareti del Museo civico. « Non trascurammo », soggiungeva il Doria, « un altro intento che pur ci stava molto a cuore: vale a dire lo studio della fauna italica e più specialmente della produzione locale, che fu da noi costantemente raccomandata agli amici nostri ». Ciò naturalmente portava anche a dare grande valore a tutta la fauna mediterranea, di cui la nostra fa indissolubilmente parte.

Tanta operosità, guidata da così nobili intenti, avrebbe meritato di essere coronata da un successo trionfale, e avrebbe dovuto rendere agevole al Doria il proseguimento della sua opera. Invece, nel 1896, quando il Museo contava ormai trenta anni di vita feconda, e gli splendidi Annali erano giunti al 38° volume, il Doria, lungi dal trovarsi su quel piedistallo a cui avrebbe avuto diritto, doveva ancora lottare e con difficoltà sempre più gravi. I locali del Museo erano diventati del tutto insufficienti, e « l'umidità lo aveva invaso in un modo straordinario ». « Il Museo civico di Genova — scrivevano al Municipio, Doria e il suo impareggiabile collaboratore prof. Gestro, invocando una nuova sede — più non è in grado di ricevere nuove collezioni e, quel che è peggio, non più in condizioni di ordinare convenientemente e di conservare quelle che già possiede. « Le preparazioni tassider-

niche », uso sempre le loro parole, « sono spesso rivestite da uno strato di muffa, e vanno deteriorando in modo sensibilissimo ». Più tardi, cioè nel 1901, dopo di aver dato alla luce il 40° volume degli Annali, dovevano sospendere la pubblicazione. Soltanto nel 1904 potevano riprenderla, perchè (sono le loro parole) da qualche tempo s'era manifestata una corrente favorevole all'Istituto. La nuova sede del Museo però potè essere inaugurata soltanto nel 1912, un anno prima della morte del Doria, già da lunghi anni sofferente.

Alla vigilia dell'inaugurazione, dal letto egli scriveva al nostro collega Capellini che la salute lo aveva abbandonato sul più bello; che avrebbe veduto soltanto in sogno il nuovo Museo; ed aggiungeva:

« È quasi mezzo secolo di lavoro e mezzo milione di capitale che ho tolto alla mia famiglia! Ho fatto bene!!! ». Convien dire — aggiunge il professore Issel, più che amico, quasi fratello — che egli aveva speso viaggiando gran parte delle sue sostanze, e si era impoverito coll'acquisto di materiale scientifico a vantaggio del Museo civico e colla pubblicazione degli Annali di questo Istituto.

* * *

Genova, riconoscente, ha deliberato di intolare il Museo civico al Doria, che ne fu il creatore e che vi aleggia ancora in ispirito.

Lo zoologo che visita questo Museo, ha l'impressione che Giacomo Doria sarebbe contento della grandiosa nuova sede delle collezioni, ma non sarebbe soddisfatto e richiederebbe dalla ricca città di Genova altri poderosi aiuti. Purtroppo (è d'uopo esser sinceri) in questi ultimi quindici anni il Museo civico di Genova non potè progredire nella stessa misura dei maggiori Musei d'Europa; essi ormai distanziano quello di Genova, che è, pur sempre, grandioso. È vero che in Italia qualunque specialista, il quale voglia aver la certezza che la sua collezione sarà ben conservata, non può far di meglio che lasciarla al Museo di Genova: e perciò, legati e doni di raccolte preziose pervengono (lo ha giustamente osservato il sindaco di Genova) e perverranno sempre a questo Istituto da diverse parti d'Italia; ma questo non basta. Occorre far molto di più, affinchè il monumento, che Genova vuole dedicato al suo grande figlio, sia veramente come questi lo sognava. Occorrono mezzi molto larghi per aumentare sempre più le raccolte e un personale numeroso, composto di esperti specialisti e di monografi da aggiungere a quegli attuali, perchè sia possibile di illustrare ed accrescere altri gruppi, oltre quelli entomologi. Queste erano le aspirazioni del Doria: i suoi mani riposeranno in pace, soltanto quando sarà assicurato l'esaudimento dei suoi voti.

Ma al Doria da molti anni sorrideva un ideale più vasto: egli vagheggiava che anche in Italia sorgesse quel Museo nazionale di storia naturale che ormai non manca neppure alle nazioni minori.

La collezione dei vertebrati italiani del Museo di Firenze — egli scriveva nel 1887 — è un esempio che prova come anche da noi si possa fare e bene: come collezione regionale, non credo che abbia l'uguale. È un monumento che il Giglioli ha innalzato alla fauna italiana e di cui il Paese gli deve esser grato... Speriamo che lo Stato, apprezzando l'esempio dato dal prof. Giglioli per la collezione italiana, curerà la fondazione di un Museo nazionale, ove sia ordinata una collezione generale. « Soprattutto riflettano (continua il Doria — e la riflessione ancor oggi dopo un quarto di secolo è opportuna —) coloro che governano la pubblica istruzione, che il personale di un Museo veramente nazionale, ove si concentrano tutte le forze del Paese, deve esser libero da qualunque impegno didattico; nessuna ora di lavoro deve esser distolta dall'ordinamento delle collezioni; nessuno dei naturalisti addetti ad un Museo nel vero senso della parola, deve pensare a farsi titoli per arrivare alla sospirata cattedra. Si devono scegliere, per accudire ai singoli rami, uomini che abbiano dato prova di essere appassionati cultori della scienza, di esser in certo modo pronti a sacrificarsi per essa. Ad essi si faccia una posizione morale e materiale che soddisfaccia ai loro bisogni e li renda tranquilli per l'avvenire... Nelle Università si abbiano le sole collezioni necessarie per l'insegnamento... Le doti degli stabilimenti superiori si spendano ad organizzare buoni laboratori, provveduti di tutto l'occorrente affinchè i giovani si possano esercitare in tutti quegli studi che formano la base della zoologia... » :} sagge proposte che Berlino ha realizzato fondando il Museo zoologico indipendente dalla Università; sapienti consigli, ai quali l'Italia invece è stata sorda.

Siccome, purtroppo, per Museo molti intendono una collezione di animali impagliati, perchè non nascano equivoci,} riporterò la definizione datane dal Doria. « Intendiamo per Musei collezioni in cui l'ostensione sia la minima parte, la parte condannata a perdersi in un tempo limitato e che si può sempre rinnovare; in essi, la parte principale deve essere una collezione di studio numerosissima, illimitata per numero di esemplari raccolti in luoghi diversi, esattamente forniti di indicazioni di provenienza, questi disposti in modo che occupino il minor spazio possibile e siano riparati completamente dalla luce, o meglio conservati in una quasi completa oscurità ».

Ho voluto fermarmi tanto a lungo su questo argomento per due ragioni: prima, perchè ritengo di rendere così il miglior omaggio alla memoria del Doria; in secondo luogo, perchè non v'ha dubbio che il Doria era bene ispirato. Oggigiorno omai tutti sono costretti a riconoscere che se è vero che la zoologia scientifica sta molto al di sopra della zoologia descrittiva, non è meno vero che anche questa è necessaria, perchè, come si esprimeva Linneo, essa è *flum ariadneum, sine quo chaos*. Se la zoologia scientifica si può paragonare al piano nobile del palazzo delle scienze, quella descrittiva viene ad essere il piano terreno, sul quale sorge quello nobile. Certamente, il cer-

vello è un organo d'ordine superiore allo stomaco; ma, per il funzionamento di quello, questo non diventa perciò meno necessario: così è della zoologia descrittiva rispetto a quella scientifica. Si aggiunga che il limite tra l'una e l'altra non è nettamente definito: tanto è vero che sarebbe assurdo di voler negare ai volumi degli Annali del Museo civico di Genova valore prettamente scientifico, inquantochè, per citare una sola ragione, nella zoologia descrittiva è compenetrata la zoocorologia, ramo importantissimo dal punto di vista scientifico.

*
* *

Come ho accennato, il museo di Genova in un tempo breve e con mezzi scarsi si è potuto arricchire di una suppellettile immensa e preziosa, perchè il Doria era nato collezionista e aveva fatto una scuola di naturalisti esploratori.

Egli, che aveva un amore infinito per le cose naturali, è stato indefesso, accurato ed abile raccoglitore di piante al principio e alla fine della sua vita; di ogni sorta di animali, ma soprattutto di insetti, per il mezzo secolo in cui poté spiegare la sua attività.

La passione delle raccolte diede a lui, di fibra poco resistente e gracile, l'animo di affrontare i disagi e i pericoli di lunghi viaggi in regioni lontane e spesso malsane.

Il primo suo viaggio data dal 1862, e si compì in Persia, dove andò come membro della Missione inviata allo scìà dal Governo italiano, insieme con due altri naturalisti, De Filippi, di lui molto più anziano, e Lessona. Ad un certo momento si separò dai colleghi, e da solo compì lunghe peregrinazioni.

Il secondo suo viaggio data dal 1865 ed è diretto ad un lembo del paradiso terrestre dei naturalisti, Borneo, l'isola degli ourang-outan, allora tanto poco nota. Gli era compagno Beccari, sommo botanico, dal quale purtroppo dovette presto distaccarsi per ragioni di salute. Più tardi il Doria esplorò le coste del mar Rosso (1879) e la Tunisia (1881-82); quando gli anni gli pesarono, si rivolse a lidi più vicini, le isolette dell'Arcipelago Toscano. Da tutti questi viaggi il Doria ha riportato importanti collezioni zoologiche. Ma ciò che egli ha saputo far raccogliere agli altri è stato molto più prezioso e abbondante. Il Doria sapeva ispirare il gusto per i viaggi, l'amore per le esplorazioni: insegnava agli esploratori i modi di far le raccolte; indicava loro ciò che più doveva interessarli; li spingeva in regioni dove ancora molto restava da scoprire, e li sorreggeva in queste esplorazioni validissimamente dal lato morale e dal lato materiale.

Se in molte esplorazioni fatte dagli italiani nell'ultimo cinquantennio vennero curate con particolare sollecitudine le raccolte zoologiche, ciò si deve al Doria, e ne fa fede l'immensa suppellettile scientifica accumulata nel Museo civico di Genova. Ricorderò anzitutto il Beccari a Borneo, nelle

isole della Sonda, nelle Molucche e nella Nuova Guinea. Il Beccari, specializzato nella botanica, fu dal Doria innamorato anche delle collezioni zoologiche, e raccolse molti animali interessantissimi, del tutto nuovi.

L. M. D'Albertis era un ardito cacciatore: Doria seppe trasformarlo in un naturalista esploratore. Anche egli si rese famoso nei suoi viaggi in Papuasìa: raggiunse i monti Arfak, dove per la prima volta occhi europei poterono contemplare le meravigliose produzioni di quella natura inesauribile, prime fra tutte le svariate tribù degli uccelli di paradiso. Solo i viaggiatori italiani — scriveva il Doria nel 1878 — hanno avuto fin qui la fortuna di cacciare le più rare e le più belle specie di uccelli di paradiso nelle foreste native! Una certa forma, scoperta dal D'Albertis, era così singolare, che per un momento fu creduta un artefatto, composto di pelli di differenti specie di paradisee. I risultati zoologici delle esplorazioni di Beccari e di D'Albertis sono stati meravigliosi. Dalla Papuasìa erano già giunti nel 1878, al Museo di Genova, oltre ad 800 esemplari di mammiferi, 10000 rettili, 3000 uccelli, 2000 pesci, 80000 insetti e un considerevole numero di altri invertebrati.

Altre collezioni, altrettanto meravigliose, pervennero al Museo di Genova più tardi raccolte da Beccari a Sumatra (1878), da Fea in Birmania (1885-88), da Modigliani a Nias (1886), da Loria nella nuova Guinea (1889-97), da Modigliani nell'interno di Sumatra e ad Engano (1890-91) e alle isole Mentavei (1894). In quasi tutti questi viaggi il Doria non fu semplice mecenate, ma la suprema mente direttrice e animatrice.

Che la Malesia e la Papuasìa siano state la principale mira di Doria per tanti anni, ogni zoologo e ogni botanico lo comprendono. Ma quando sorse l'occasione, il Doria diresse i suoi collaboratori anche ad altri lidi: così fece unire alla spedizione Bove il Vinciguerra, che riportò al Museo di Genova importanti vertebrati dall'Isola degli Stati e dallo stretto di Magellano.

Anche verso l'Africa il Doria aveva appuntato il suo occhio parecchie volte; ma vi concentrò tutta la sua attività soltanto nel 1891, quando fu nominato presidente della nostra benemerita Società geografica. Per questa alta carica egli aveva una lunghissima preparazione: e infatti, pur dando la preferenza alle raccolte zoologiche, sapeva giustamente apprezzare anche quelle botaniche e quelle etnografiche, e molto s'interessava anche dei problemi geografici. Ma in quell'epoca non era possibile far soltanto della scienza per la scienza, perchè le nazioni più potenti europee stavano disputandosi il predominio in quelle parti del continente africano, che potevano ancora ritenersi *res nullius*: e l'Italia non voleva, non doveva restar colle mani vuote; l'africanismo, come scrisse Della Vedova, era allora nello spirito dei tempi, era nel Paese. Ecco perchè l'opera della Società geografica, sotto la presidenza di Doria, si svolse specialmente in Africa.

Nell'Africa orientale il Giuba era stato preso come limite tra la sfera d'influenza dell'Italia e quella dell'Inghilterra: confine che non era confine, perchè il corso del Giuba era in gran parte sconosciuto. Bisognava esplorare il Giuba. Ecco una grandiosa impresa di cui la Società geografica prendeva l'iniziativa, auspicî Della Vedova, il cui nome merita il primo posto, Doria, Millosewicz e altri. Il capitano Vittorio Bottego: ecco per l'impresa l'uomo, del quale Doria genialmente aveva intuito le eminenti qualità di condottiero, di naturalista e di esploratore.

La meravigliosa impresa è stata consacrata ai posteri nel libro: *Il Giuba esplorato*; nella prefazione di questa opera è messa in chiaro la non piccola parte di merito che ne ridonda a Doria. La seconda spedizione Bottego, sempre di completa iniziativa della Società geografica, portò alla conoscenza del corso medio e inferiore dell'Omo, che era anch'esso ignoto. Purtroppo gli splendidi risultati di questa seconda spedizione, che coincisette colla malaugurata guerra coll'Abissinia, furono scontati con fiere tragedie: essa costò la vita oltrechè al Sacchi compagno del Bottego, al Bottego stesso; e potè essere narrata soltanto da Vannutelli e da Citerni salvatisi quasi per miracolo. La Società geografica, di cui era sempre presidente il Doria, ebbe a soffrire non soltanto per queste perdite, ma anche perchè il Paese, dopo i disastri di Abba Carima e di Adua, alla ricerca di capri espiatori, coinvolse nelle censure anche la Società geografica, la quale invece, come scrisse Della Vedova, per amor di patria, per zelo di studi, niente altro che per questo, si era accostata ad imprese che facevano parte del programma di un determinato partito politico, e perciò si era trovata esposta alle ripercussioni di acerbe ire. Così è che quella presidenza della Società geografica, che aveva procurato al Doria tante soddisfazioni fino al 1894, dopo quell'epoca gli apportò ogni sorta di dolori.

Al Doria però la fortuna concedette di vivere fino al giorno, in cui la nazione unanime spontaneamente rinnovò le gesta africane, questa volta con miglior fortuna; e ciò venne a giustificare, e, più che giustificare, a circondare dell'aureola dei precursori quella Società geografica che egli avea presieduta nei suoi più belli e nei suoi più brutti momenti. Purtroppo, al Doria non fu altrettanto favorevole la fortuna per quei Musei di Storia Naturale che per tutta la sua vita stettero in cima de' suoi pensieri. Il nostro Paese per ora ai Musei non pensa: o meglio sembra che sia sulla via di disfarsene, se si deve giudicare dalla sorte toccata recentemente al Museo Agrario di Roma. Ma seguiamo l'esempio lasciatoci dal Doria: non scoraggiamoci, e speriamo in giorni più favorevoli a quella coltura scientifica superiore, che è stata la gloria dei nostri avi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste il fascicolo 1° dell'opera dei professori OMODEO, PEGLION e VALENTI: *La Colonia Eritrea: condizioni e problemi*, edita per cura della Società italiana pel progresso delle scienze; la Memoria a stampa del Socio straniero LACROIX, avente per titolo: *Les Latérides de la Guinée et les produits d'altération qui leur sont associés*; e il *Processo verbale*, presentato da G. LECOINTE, relativo alla sessione tenuta in Roma nel 1913, dalla Commissione polare internazionale.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 maggio 1914.

- BÉGUINOT A. — Flora padovana, ossia prospetto floristico e fitogeografico delle piante vascolari indigene inselvatichite o largamente coltivate crescenti nella provincia di Padova, con notizie storico-bibliografiche sulle fonti della flora. Padova, 1910-14. 8°.
- DE BLASIO A. — La psico-narco-anestesia nel tatuaggio. (Estr. dall' « Archivio di antropologia criminale, psichiatria e medicina legale », vol. XXXV). Torino, 1914. 8°.
- DE STEFANI C. — Fossili della creta superiore, raccolti da Michele Sforza in Tripolitania. (Estr. dalla « Palaeontographia italica », vol. XIX). Pisa, 1913. 4°.
- LACROIX A. — Les latérites de la Guinée et les produits d'altération qui leur sont associés. (Extr. des « Nouvelles Archives du Muséum », 5^e sér., t. V, 1913). Paris, 1914. 4°.
- LECOINTE G. — Procès-verbal de la session tenue a Rome en 1913. (Commission polaire internationale). Bruxelles, 1913. Bruxelles, 1913. 8°.
- ODÓN DE BUEN. — Reunión en Roma de la Comisión internacional para el estudio del Mediterraneo. Comunicación. Madrid, 1914. 8°.
- OMODEO A. — La colonia Eritrea: condizioni e problemi. Fasc. I. (Società ital. per il progresso delle scienze). Roma, 1913. 8°.
- PORCARI G. — Nuove tavole matematiche e nuove formole per abbreviare e controllare i calcoli usuali, ornate di utili nozioni scientifiche. Roma, 1914. 8°.
-

